Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 2

Zbiór zadań do liceów i techników

ZAKRES ROZSZERZONY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Rysunki, skład i łamanie
Artepagina.com – Wojciech Prusakiewicz
Anna Ugniewska

Redakcja
Tomasz Szwed

Fotografia na okładce: *Wnętrze sfery*
Autor: Karolina Kania
Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie"
www.mwo.usz.edu.pl

Druk i oprawa
Druk-Serwis Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze *One Bulk* 65 g
www.antalis.pl

Wydanie I, Warszawa 2020 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-197-5

Spis treści

Symbolem *D* zostały oznaczone zadania na dowodzenie.

1. Przekształcenia wykresów funkcji

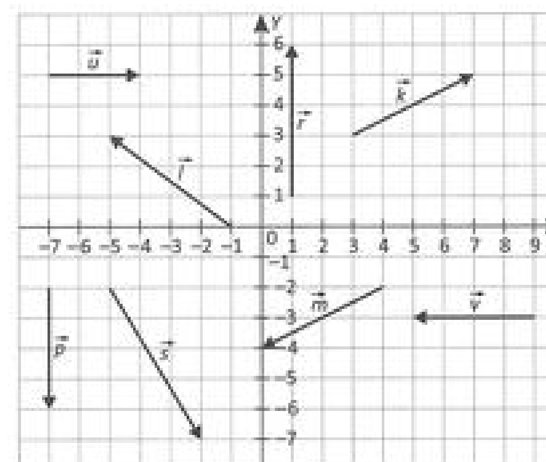
Wektor w układzie współrzędnych – podstawowe informacje

1.1. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj podane wektory. Początek każdego wektora obierz dowolnie.

a) $\vec{a}=[5, 0]$ b) $\vec{b}=[-3, 0]$ c) $\vec{c}=[0, 1]$ d) $\vec{d}=[0, -4]$

e) $\vec{e}=[-1, 3]$ f) $\vec{f}=[2, -5]$ g) $\vec{g}=[-3, -1]$ h) $\vec{h}=[2, 4]$

1.2. Odczytaj z rysunku współrzędne wektorów:



1.3. Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli:

a) $A(-2, 3), B(4, 0)$ b) $A(0, -\sqrt{3}), B(2, 2\sqrt{3})$

c) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), B(1, 3)$ d) $A(-4, 8), B\left(5\frac{1}{2}, -6\right)$

1.4. Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ jeśli: $A(-2, -3)$ $B(1, -4)$, $C(-4, 5)$.

1.5. Oblicz długość wektorów:

a) $\vec{u}=[-5, 12]$ b) $\vec{v}=\left[4\frac{1}{2}, 6\right]$ c) $\vec{p}=[-11, -60]$ d) $\vec{s}=\left[2, -\sqrt{5}\right]$

1.6. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli:

a) $A(2, 3)$; $B(-1, 5)$ b) $A(4, 0)$; $B(6, -1)$

c) $A(-4, -2)$; $B(20, 5)$ d) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $B(1, -2)$

1.7. Wyznacz współrzędne punktu B, jeśli:

a) $A(0, 4)$; $\overrightarrow{AB}=[-3, 5]$ b) $A(-2, 5)$; $\overrightarrow{AB}=[1, 8]$

c) $A(4, -3)$; $\overrightarrow{AB}=[0, -6]$ d) $A\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left[3\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right]$

1.8. Wyznacz współrzędne punktu A, jeśli:

a) $B(-1, 6)$; $\overrightarrow{AB}=[4, -1]$ b) $B(2, -9)$; $\overrightarrow{AB}=[-3, 2]$

c) $B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left[\frac{1}{2}, -4\right]$ d) $B\left(\sqrt{3}, -5\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left[2\sqrt{3}, 0\right]$

1.9. Dane są punkty $A(-1, -3)$, $B(-4, 3)$, $C(2, 0)$, $D(2, -9)$, $E(-1, 6)$. Sprawdź, które z wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CE}$ są równe, a które przeciwne.

1.10. Na odcinku AB wyznacz punkt P tak, aby wektory $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{PB}$ były sobie równe.

a) $A(-3, 2)$, $B(5, 6)$ b) $A(-4, 5)$, $B(1, 0)$

1.11. Dane są punkty A i B. Wyznacz współrzędne środka S odcinka AB trzema sposobami: 1) ze wzorów; 2) z równości wektorów $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{SB}$; 3) z informacji, że wektory $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$ są przeciwne.

a) $A(-10, 4)$, $B(6, -2)$ b) $A(-2, 5)$, $B(4, -3)$

c) $A(-2, 4)$, $B(0, 12)$ d) $A(-4, -2)$, $B(-3, -5)$

1.12. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Wyznacz punkt B, jeśli:

a) $A(-4, 3)$, $S(0, 1)$ b) $A(-6, 2)$, $S(3, -1)$

c) $A(-2, 4)$, $\overrightarrow{AS}=[1, -3]$ d) $A(4, 1)$, $\overrightarrow{SA}=[6, 2]$

1.13. Punkt S jest punktem wspólnym odcinka AB i jego symetralnej. Wyznacz współrzędne punktu A, jeśli:

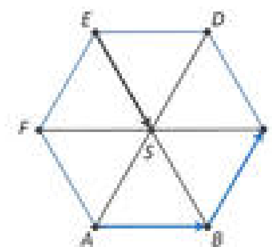
a) $S(-2, 1)$ $\overrightarrow{SB}=[5, -4]$ b) $S(1, -1)$, $\overrightarrow{BS}=[3, 7]$

1.14. Dane są cztery różne punkty A, B, C, D. Jeśli wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe, to co można powiedzieć o wektorach $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{DB}$?

1.15. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AD, EB i FC sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Z danych na rysunku odcinków utwórz wektory, które są równe wektorowi:

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{ES}$



1.16. Wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne: $A(-4, -2)$, $B(5, -1)$, $C(1, 3)$. Oblicz długości boków trójkąta ABC. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.

1.17. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-2, -3)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 3)$.

a) Oblicz obwód trójkąta ABC.
b) Oblicz długość środkowej BD.

1.18. Dane są punkty A, B, C, D. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Następnie oblicz jego obwód.

a) $A(-2, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(2, 5)$, $D(1, 7)$

b) $A(2, -5)$, $B(7, 0)$, $C(2, 5)$, $D(0, 3)$

1.19. Punkty $A(-3, -1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 5)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

a) Oblicz współrzędne wierzchołka D.
b) Oblicz współrzędne punktu S przecięcia się przekątnych.
c) Oblicz długości przekątnych równoległoboku.

1.20. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D równoległoboku $ABCD$, wiedząc, że $A(-4, 4)$, $B(-2, -1)$, a przekątne AC i BD przecinają się w punkcie $S(-1, 3)$. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

1.21. W trójkącie ABC dane są: $A(-5, 2)$, $C(1, 5)$. Wiedząc, że $\overrightarrow{CD}=[-2, -6]$, gdzie D to środek boku AB, oblicz współrzędne wierzchołka B oraz długość boku AB.

1.22. Wyznacz liczby m i n wiedząc, że:

a) wektory $\vec{a}=[2m+n, m-3n]$ i $\vec{b}=[m-1, -n+5]$ są równe

b) wektory $\vec{a}=[3m+5n, 2n-6]$ i $\vec{b}=[m+4, -2n+3]$ są równe

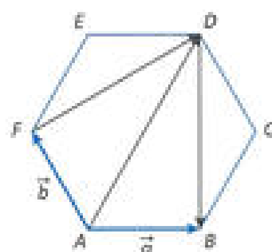
c) wektory $\vec{a}=[3m-4, m-8]$ i $\vec{b}=[m+2n, m-2n]$ są przeciwne

d) wektory $\vec{a}=[m-n, 2-m]$ i $\vec{b}=[m+n, n+4]$ są przeciwne.

1.23. W kwadracie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku DC, zaś punkt F jest środkiem boku BC. Wyraź wektor $\overrightarrow{EF}$ w zależności od wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

1.24. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ oraz wektory: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Wyznacz za pomocą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wektor:

a) $\overrightarrow{FD}$ b) $\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{DB}$



1.25. Punkty A, B, C mają współrzędne: $A(2, 4)$, $B(6, 1)$, $C(7, 7)$. Przedstaw (na oddzielnych rysunkach) następujące wektory i oblicz ich współrzędne:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ o początku w punkcie A

b) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ o początku w punkcie C

c) $2\cdot\overrightarrow{AC}$ o początku w punkcie A

d) $-2\cdot\overrightarrow{AC}$ o początku w punkcie B

e) $-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$ o początku w punkcie A.

1.26. Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(5, 6)$, $C(-2, -3)$, $D(4, 0)$. Korzystając z własności wektorów wykaż, że:

a) proste AB i CD są równoległe b) proste AC i BD nie są równoległe.

D **1.27.** Dane są punkty $A(-2, 2)$, $B(7, -3)$, $C(4, 3)$, $D(2, -6)$. Korzystając z własności wektorów wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem i nie jest równoległobokiem.

D **1.28.** Korzystając z własności wektorów wykaż, że punkty $A(-4, 5)$, $B(4, -1)$, $C(8, -4)$ są współliniowe, a punkt $D(6, -2)$ nie należy do prostej AB.

1.29. Punkty A, B, C, D mają współrzędne: $A(-3, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, -5)$, $D(-1, -7)$. Oblicz współrzędne wektorów:

a) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$ b) $3\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$ d) $4\overrightarrow{AD}-6\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{BD}$

1.30. Dane są punkty: $A(1, -1)$, $B(4, -2)$, $C(10, -9)$. Wyznacz taki punkt D, aby $2\cdot\overrightarrow{AB}-3\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}$.

1.31. Dane są wektory: $\vec{a}=[1, -1]$, $\vec{b}=[2, 1]$, $\vec{c}=[-5, -7]$. Wyznacz takie liczby rzeczywiste k i l, aby $k\cdot\vec{a}+l\cdot\vec{b}=\vec{c}$

1.32. Dane są dwa wektory: $\vec{a}=[3, -1]$ oraz $\vec{b}=[5, 3]$. Znajdź taki wektor $\vec{x}$, aby:

a) $2\cdot\vec{x}+3\cdot\vec{a}=\vec{b}$ b) $\frac{1}{3}\cdot\vec{x}+\vec{b}=2\vec{a}$

c) $\vec{x}=3\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ d) $\frac{1}{2}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{a}-2\cdot\vec{x}$

e) $3\cdot\left(\vec{x}-\vec{a}\right)=2\cdot\left(\vec{x}+\vec{b}\right)$

Przesunięcie równoległe. Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX

1.33. Wyznacz współrzędne punktu A_1, będącego obrazem punktu A w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$, jeśli:

a) $A(9, -1)$, $\vec{u}=[-8, 3]$ b) $A(-3, 5)$, $\vec{u}=[6, 0]$ c) $A(4, 7)$, $\vec{u}=[1, 3]$

1.34. Obrazem punktu B w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ jest punkt B_1. Wyznacz współrzędne punktu B, jeśli:

a) $B_1(1, 2)$, $\vec{u}=[-5, 0]$ b) $B_1(3, -2)$, $\vec{u}=[-7, 1]$ c) $B_1(5, 1)$, $\vec{u}=[4, 6]$

1.35. Funkcja f jest opisana za pomocą tabeli:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	0	1	2

Wykonaj tabelę, opisującą funkcję h, której wykres powstanie w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji f:

a) o 3 jednostki w prawo b) o 2 jednostki w lewo.

Przeanalizuj dziedziny i zbiory wartości funkcji f i h.

1.36. Funkcja f jest opisana za pomocą tabeli: $f(x)$

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−10	−5	0	5	10

Przedstaw za pomocą tabelki funkcję g, opisaną wzorem:

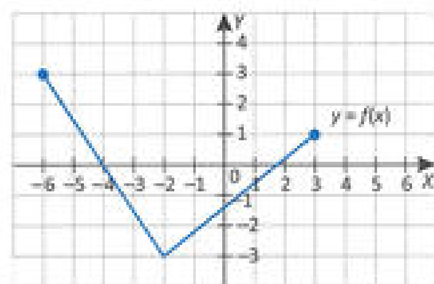
a) $g(x) = f(x-9)$ b) $g(x) = f(x+53)$.

1.37. Podaj, o ile jednostek, i w którą stronę należy przesunąć wykres funkcji f wzdłuż osi OX, aby otrzymać wykres funkcji:

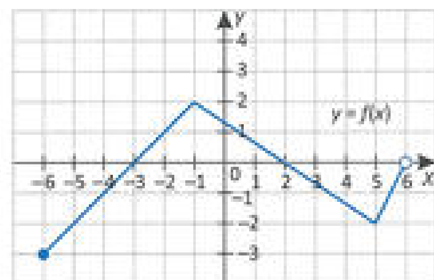
a) $y = f(x-4)$ b) $y = f(x+6)$ c) $y = f(x+5)$ d) $y = f(x-10)$.

W każdym przypadku podaj współrzędne wektora przesunięcia.

1.38. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x-4)$ oraz $h(x) = f(x+1)$. Odczytaj z wykresu dziedzinę funkcji f, g oraz h.



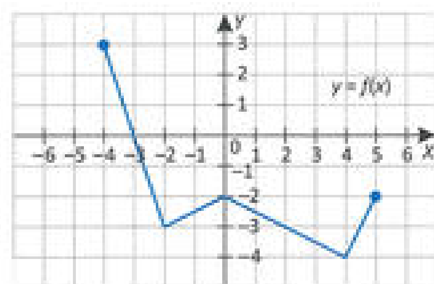
1.39. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x+3)$ oraz $h(x) = f(x-2)$. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f, g oraz h.



1.40. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x+2)$ oraz $h(x) = f(x-5)$. Odczytaj z wykresu wartości funkcji f dla argumentów: −2, 0 oraz 4. Podaj wartoś wyrażenia:

a) $g(-4) \cdot g(-2) + g(2)$

b) $h(3) \cdot [h(5) - h(9)]$.



1.41. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji f wzdłuż osi OX:

a) o 3 jednostki w lewo, jeśli $f(x) = \sqrt{x}$

b) o 2 jednostki w prawo, jeśli $f(x) = x^2$

c) o 5 jednostek w prawo, jeśli $f(x) = -\frac{1}{2}x$

d) o 1 jednostkę w lewo, jeśli $f(x) = |x|$

e) o 1 jednostkę w lewo, jeśli $f(x) = x^3$

f) o 3 jednostki w prawo, jeśli $f(x) = \frac{1}{x}$.

W każdym przypadku naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj współrzędne wektora przesunięcia.

1.42. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, wiedząc, że w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$ otrzymano wykres funkcji g, jeśli:

a) $f(x) = 2x^2$ i $g(x) = 2(x-5)^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \sqrt{x+10}$

c) $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = \frac{2}{x-3}$ d) $f(x) = 0{,}5x^3$ i $g(x) = 0{,}5(x+8)^3$

e) $f(x) = -x^3$ i $g(x) = -(x-1)^3$ f) $f(x) = |x|$ i $g(x) = |x-4|$

1.43. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = (x-3)^2$, określonej w zbiorze $\mathbb{R}$. Odczytaj z wykresu:

a) wartość funkcji g dla argumentu 1,

b) maksymalne przedziały monotoniczności funkcji g.

1.44. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \sqrt{x+2}$.

a) Podaj dziedzinę funkcji g. b) Podaj miejsce zerowe funkcji g.

1.45. Naszkicuj wykres funkcji g, opisanej wzorem $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

a) Określ dziedzinę funkcji g.

b) Oblicz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji g przecina oś OY.

c) Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja g jest malejąca.

1.46. Funkcję f określa wzór $f(x) = x^3$, gdzie $x \in \langle -2, 2)$. Wykres funkcji g powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji f o wektor $\vec{u} = [-2, 0]$.

a) Podaj wzór funkcji g.

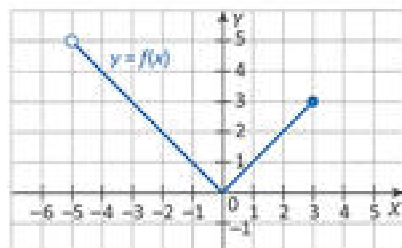
b) Naszkicuj wykresy funkcji f i g w jednym układzie współrzędnych.

c) Porównaj miejsce zerowe funkcji g z miejscem zerowym funkcji f.

1.47. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji $f(x) = |x|$, gdzie $x \in (-5, 3\rangle$. Funkcję g określa wzór $g(x) = f(x - 4)$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji g.

b) Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji g.



1.48. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle -8, 7\rangle$. Podaj dziedzinę funkcji g, jeśli:

a) $g(x) = f(x + 2)$ b) $g(x) = f(x - 10)$

c) $g(x) = f(x - 137)$ d) $g(x) = f(x + 2009)$

1.49. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -4, 0 oraz 6, a jej zbiorem wartości przedział liczbowy $\langle -3, 5)$. Podaj miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji g, jeśli $g(x) = f(x + 8)$.

1.50. Punkty $(-2, 5)$, $(3, 1)$, $(4, -6)$ należą do wykresu funkcji f. Podaj trzy punkty, które należą do wykresu funkcji, określonej wzorem:

a) $g(x) = f(x - 15)$ b) $h(x) = f(x + 21)$ c) $k(x) = f(x - 7) + x$

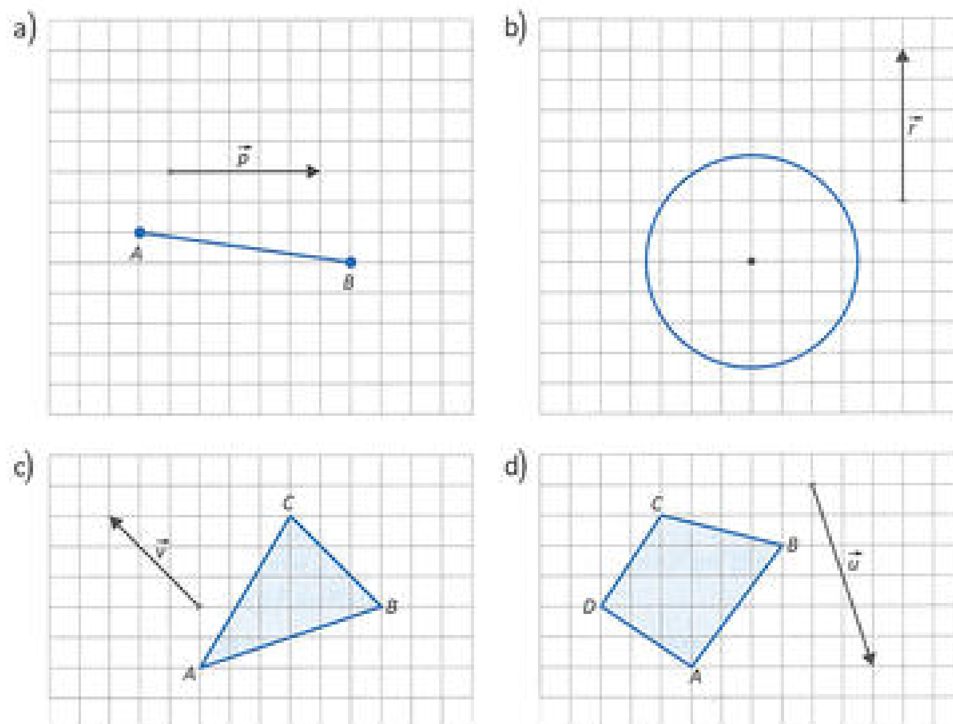
1.51. Dany jest wzór funkcji f i współrzędne wektora $\vec{u}$. Wyznacz wzór funkcji g, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $\vec{u} = [5, 0]$ b) $f(x) = 2x - 1$, $\vec{u} = [-3, 0]$

c) $f(x) = x^2 - 3x$, $\vec{u} = [-1, 0]$ d) $f(x) = (x + 1)(x - 5)$, $\vec{u} = [4, 0]$

Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OY

1.52. Znajdź obrazy następujących figur w przesunięciu równoległym o podany wektor.



1.53. Funkcja f jest opisana za pomocą tabeli:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	0	1	2

Wykonaj tabelę, opisującą funkcję h, której wykres powstanie w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji f:

a) o 2 jednostki do góry b) o 7 jednostek do dołu.

Porównaj dziedziny i zbiory wartości funkcji f i h.

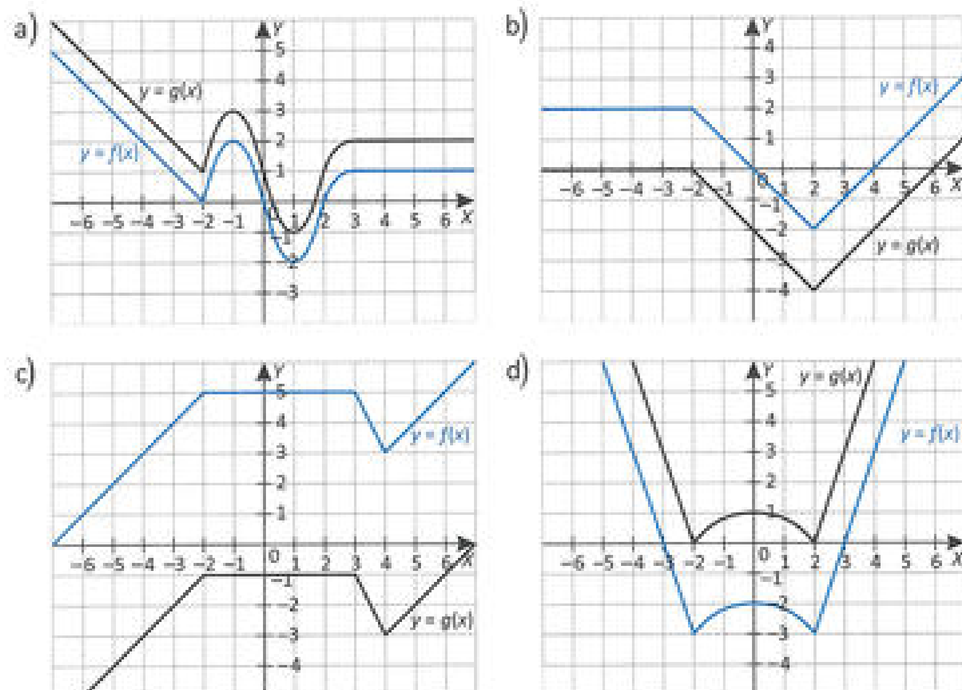
1.54. Funkcja f jest opisana za pomocą tabeli:

x	-3	-2	0	1	6	28
$f(x)$	-4	-1	2	9	11	81

Opisz za pomocą tabelki funkcję określoną wzorem:

a) $g(x) = f(x) + 6$ b) $g(x) = f(x) - 21$

1.55. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g?



1.56. Podaj, o ile jednostek i w którą stronę należy przesunąć równolegle wykres funkcji f wzdłuż osi OY, aby otrzymać wykres funkcji g, jeśli:

a) $g(x) = f(x) - 4$

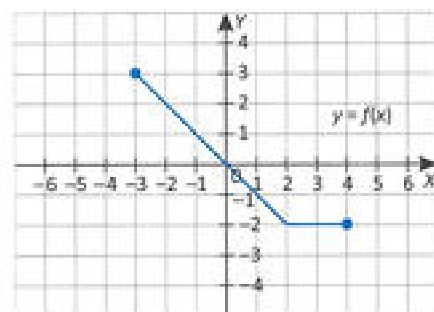
b) $g(x) = f(x) + 2$

c) $g(x) = f(x) + 8$

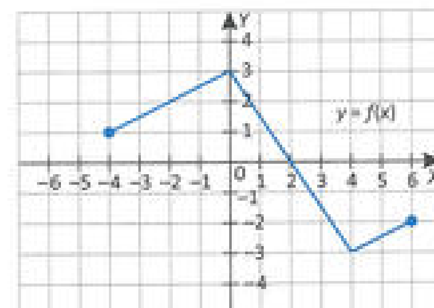
d) $g(x) = f(x) - 3$

W każdym przypadku podaj współrzędne wektora przesunięcia.

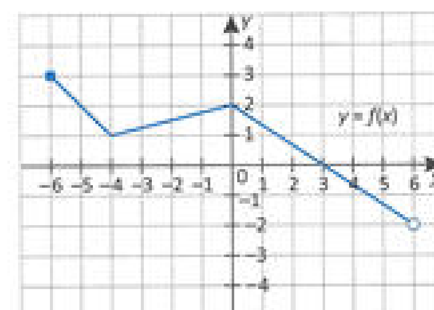
1.57. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x) - 1$ oraz $h(x) = f(x) + 4$. Odczytaj z wykresu wartość funkcji f dla argumentu (-2). Oblicz wartość wyrażenia $3 \cdot g(-2) - 8 \cdot h(-2)$.



1.58. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 5$ oraz $h(x) = f(x) - 2$. Odczytaj z rysunku współrzędne punktu, w którym wykres funkcji f przecina oś OY. Oblicz wartość wyrażenia $g(0) \cdot h(0)$.



1.59. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 2$ oraz $h(x) = f(x) - 5$. Odczytaj współrzędne punktów, w których wykresy funkcji f, g oraz h przecinają oś OY. Podaj miejsca zerowe funkcji f, g oraz h (o ile takie istnieją).



1.60. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji f wzdłuż osi OY:

a) o 5 jednostek do góry, jeśli $f(x) = -2x + 1$

b) o 3 jednostki do dołu, jeśli $f(x) = \sqrt{x}$

c) o 7 jednostek do dołu, jeśli $f(x) = 3x^2$

d) o 4 jednostki do góry, jeśli $f(x) = |x|$

e) o 2 jednostki w dół, jeśli $f(x) = \frac{4}{x}$

f) o 3 jednostki do góry, jeśli $f(x) = \frac{1}{5}x^3$.

W każdym przypadku podaj współrzędne wektora przesunięcia.

1.61. Dany jest wzór funkcji f i wektor $\vec{u}$. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$, jeśli:

a) $f(x) = -4\sqrt{x}$, $\vec{u} = [0, 4]$

b) $f(x) = 3x^2$, $\vec{u} = [0, -1]$

c) $f(x) = \frac{5}{x}$, $\vec{u} = [0, 2]$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$, $\vec{u} = [0, -8]$.

1.62. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji g, opisanej wzorem $g(x)=\frac{1}{x}+2$. Następnie podaj:

a) miejsce zerowe funkcji g,
b) zbiór wartości funkcji g,
c) przedziały monotoniczności funkcji g.

1.63. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji g, opisanej wzorem $g(x) = x^2 - 1$. Odczytaj z wykresu:

a) miejsca zerowe funkcji g,
b) zbiór wartości funkcji g,
c) maksymalny przedział, w którym funkcja g jest malejąca.

1.64. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji g, opisanej wzorem $g(x) = \sqrt{x} + 3$. Odczytaj z wykresu:

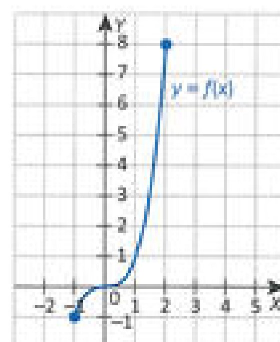
a) argument, dla którego wartość funkcji g wynosi 5,
b) wartość funkcji g dla argumentu 9,
c) zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje dla argumentów z przedziału $\langle 0, 4)$.

1.65. Funkcję f określa wzór $f(x) = |x|$, gdzie $x \in (-5, 4)$. Wykres funkcji g powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji f o wektor $\vec{u} = [0, -4]$.

a) Podaj wzór funkcji g.
b) Naszkicuj wykresy funkcji f i g w jednym układzie współrzędnych.
c) Podaj najmniejszą wartość funkcji f oraz najmniejszą wartość funkcji g.

1.66. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji $f(x) = x^3$, gdzie $x \in \langle -1, 2 \rangle$. Funkcję g określa wzór $g(x) = f(x) - 1$.

a) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.
b) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią OY.



1.67. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział liczbowy $\langle -4, 6 \rangle$. Wyznacz zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem:

a) $g(x) = f(x) - 12$
b) $g(x) = f(x) + 30$
c) $g(x) = f(x) - 212$
d) $g(x) = f(x) + 2345$

1.68. Punkty $(-3, 1)$, $(2, -4)$ należą do wykresu funkcji f. Podaj dwa punkty, które należą do wykresu funkcji, określonej wzorem:

a) $g(x) = f(x) - 6$
b) $h(x) = f(x) + 21$
c) $k(x) = f(x) - 7 + x$

1.69. Dany jest wzór funkcji f i współrzędne wektora $\vec{u}$. Wyznacz wzór funkcji g, której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $\vec{u} = [0, -5]$
b) $f(x) = 2x - 1$, $\vec{u} = [0, 1]$
c) $f(x) = (x + 1)^2$, $\vec{u} = [0, 2]$

1.70. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 2x$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OX o wektor $\vec{u} = [-3, 0]$ i otrzymano wykres funkcji g.

a) O jaki wektor $\vec{v}$ można przesunąć równolegle wykres funkcji f wzdłuż osi OY, aby otrzymać wykres funkcji g? Przeprowadź odpowiednie obliczenia. Następnie naszkicuj wykresy funkcji f i g w jednym układzie współrzędnych i zaznacz wektory przesunięcia.
b) Czy przesuwając równolegle wykres funkcji $f(x) = x^2$ raz o wektor $\vec{u} = [-3, 0]$ i drugi raz o wektor $\vec{v}$ otrzymamy wykres tej samej funkcji?

1.71. Wykres funkcji liniowej $f(x) = \frac{-x}{2}$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OY o wektor $\vec{u} = [0, -2]$ i otrzymano wykres funkcji g. O jaki wektor $\vec{v}$ można przesunąć równolegle wykres funkcji f wzdłuż osi OX, aby otrzymać wykres funkcji g? Przeprowadź odpowiednie obliczenia. Następnie naszkicuj wykresy funkcji f i g w jednym układzie współrzędnych i zaznacz wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, zaczepione w punkcie $O(0, 0)$.

1.72. Funkcja f jest opisana za pomocą tabelki:

x	−4	−3	0	5	12	40	100
$f(x)$	−10	−8	−5	1	2	25	400

Opisz za pomocą tabelki funkcję g określoną wzorem:

a) $g(x) = f(x - 1) + 5$
b) $g(x) = f(x + 3) + 12$
c) $g(x) = f(x - 15) - 100$
d) $g(x) = f(x + 100) - 256$

1.73. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g, jeśli:

a) $g(x) = f(x-2) + 4$ b) $g(x) = f(x+1) + 5$ c) $g(x) = f(x+5) - 3$

d) $g(x) = f(x-7) - 2$ e) $g(x) = f\left(x-\sqrt{3}\right) + 10$ f) $g(x) = f(x+4) - \sqrt{2}$.

1.74 Wykres funkcji f przesuń równolegle o wektor $\vec{u}$. Napisz wzór funkcji g, której wykres otrzymałeś, jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $\vec{u} = [1, 2]$ b) $f(x) = x^2$, $\vec{u} = [-2, 3]$

c) $f(x) = |x|$, $\vec{u} = [4, -5]$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\vec{u} = [1, -3]$.

1.75. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g, jeśli:

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x-1| + 8$

b) $f(x) = x^3$, $g(x) = (x+20)^3 - 4$

c) $f(x) = x^4$, $g(x) = (x+3)^4 - 1$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 4$

e) $f(x) = 3\sqrt{x}$, $g(x) = 3\sqrt{x+2} + 6$

f) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x-5} - 7$.

1.76. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = (x+2)^2 - 4$ b) $y = |x+3| + 1$ c) $y = \sqrt{x-1} - 2$

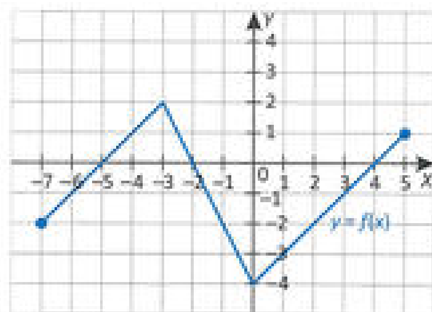
d) $y = \frac{1}{x-2} + 1$ e) $y = (x+1)^3 - 1$ f) $y = \frac{x+4}{2} + 3$.

1.77. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Funkcję g określa wzór: $g(x) = f(x+2) + 5$. Wyznacz:

a) przedziały monotoniczności funkcji g

b) wartość największą i wartość najmniejszą funkcji g oraz dla jakich argumentów są one przyjmowane

c) wartość wyrażenia:
$g(-6) \cdot g(-2) + g(0) \cdot g(3)$.



1.78. Dana jest dziedzina i zbiór wartości funkcji f. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, jeśli:

a) $D_f = (-\infty, 3\rangle$, $ZW_f = (-4, 1\rangle$, $g(x) = f(x+5) + 2$

b) $D_f = \langle -2, 8\rangle$, $ZW_f = \langle 1, 9\rangle$, $g(x) = f(x-7) - 10$

c) $D_f = \mathbf{R} - \{5\}$, $ZW_f = (-2, +\infty)$, $g(x) = f(x+6) - 5$

d) $D_f = (-8, 1)$, $ZW_f = (-\infty, 6\rangle$, $g(x) = f(x-3) + 4$.

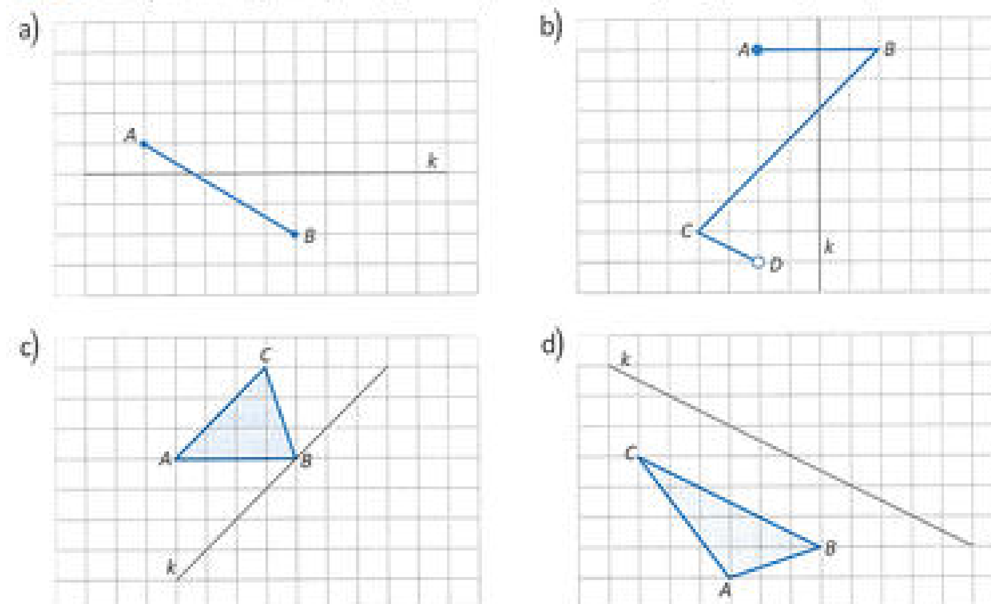
1.79. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji f o wektor $\vec{u}$, jeśli:

a) $f(x) = x^2 - x + 3$, $\vec{u} = [-4, -5]$ b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $\vec{u} = [3, 1]$

c) $f(x) = -3x^2 + 5$, $\vec{u} = [-1, 2]$ d) $f(x) = 2(x+1)(x-1)$, $\vec{u} = [-2, 7]$.

Symetria osiowa. Symetria osiowa względem osi OX i OY

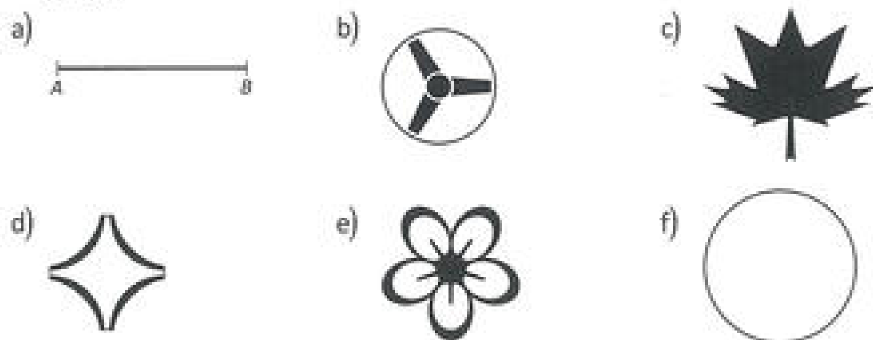
1.80. Znajdź obrazy danych figur w symetrii osiowej względem prostej k.



1.81. Zapoznaj się z poniższą definicją, a następnie wykonaj ćwiczenia.

„Prostą k nazywamy ***osią symetrii*** *figury F wtedy, gdy obrazem figury F w symetrii względem prostej k jest ta sama figura F, czyli* $S_k(F) = F$.
Figury, które mają oś symetrii nazywamy figurami ***osiowosymetrycznymi****".*

1) Poniżej przedstawione są figury osiowosymetryczne. Ile osi symetrii ma każda z nich



2) Podaj przykład figury, która ma sześć osi symetrii.
3) Podaj przykład figury, która nie jest osiowosymetryczna.
4) Ile osi symetrii ma trójkąt:
   - różnoboczny
   - równoramienny, który nie jest równoboczny
   - równoboczny?

1.82. Funkcja f jest opisana za pomocą tabelki:

a)

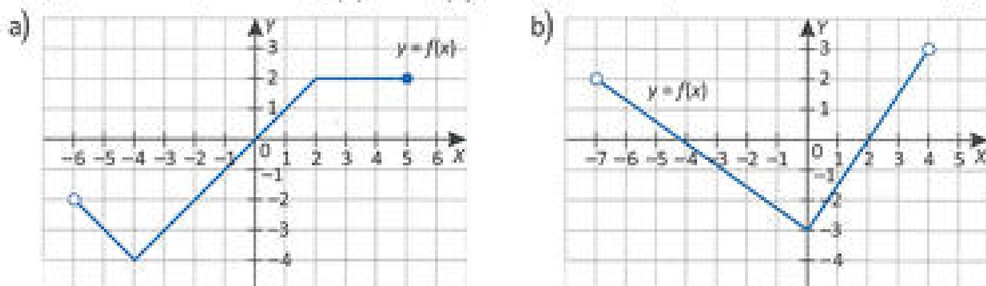
x	−42	−30	6	15	17	2012
$f(x)$	−14	−12	15	6	90	143

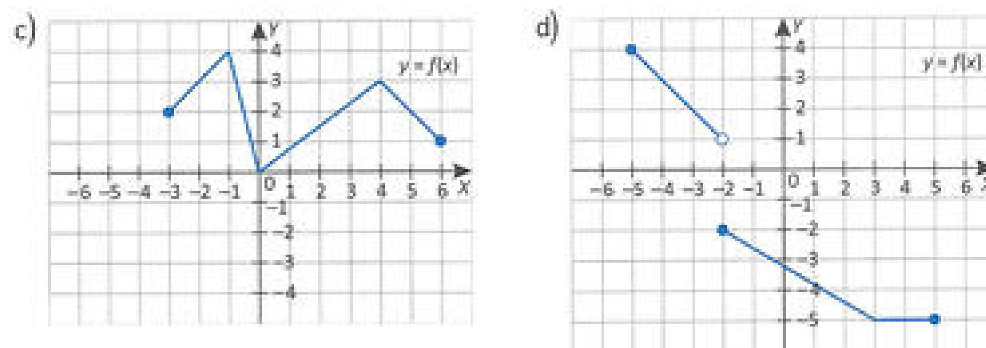
b)

x	−23	−15	15	64	198	200
$f(x)$	112	−10	6	−15	90	143

Przedstaw za pomocą tabelki funkcję g, jeśli $g(x) = -f(x)$.

1.83. Na rysunkach jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji g, określonej wzorem $g(x) = -f(x)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.





1.84. Napisz wzór funkcji g, której wykres otrzymamy po przekształceniu wykresu funkcji f przez symetrię osiową względem osi OX.

a) $f(x) = 3x - 2$ b) $f(x) = -5x + 8$ c) $f(x) = x^3 + 8$
d) $f(x) = 1 - x^2$ e) $f(x) = |x| - 15$ f) $f(x) = \sqrt{x} + 7$

1.85. Dana jest funkcja f. Napisz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OX. Naszkicuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

a) $f(x) = -4$ b) $f(x) = x - 3$ c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = x^3$ e) $f(x) = \sqrt{x+2}$ f) $f(x) = x^2 - 1$

1.86. Dana jest dziedzina i zbiór wartości funkcji f. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x) = -f(x)$.

a) $D_f = \langle -4, 3)$, $ZW_f = (-1, 5\rangle$ b) $D_f = \mathbf{R} - \{3\}$, $ZW_f = \langle -4, +\infty)$

1.87. Funkcja f jest opisana za pomocą tabelki:

a)

x	−10	−6	−4	−3	1	2	7
$f(x)$	−5	−4	−1	0	2	5	13

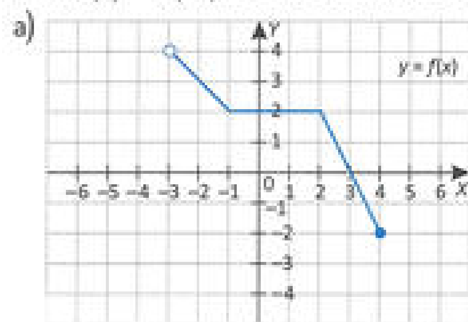
b)

x	−46	−26	0	1	17	28	67
$f(x)$	−5	46	−7	−23	−22	11	13

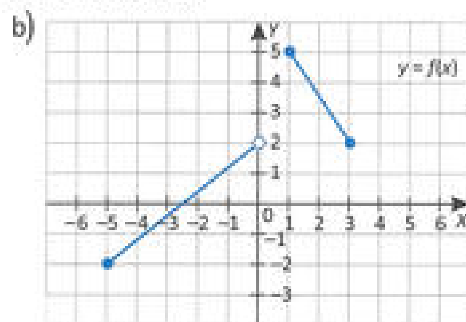
Przedstaw za pomocą tabelki funkcję okreoeloną wzorem $g(x) = f(-x)$.

1.88. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji g, określonej wzorem $g(x) = f(-x)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.

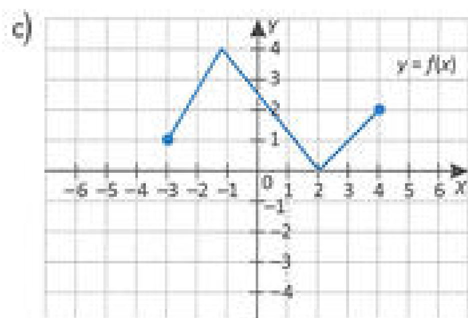
a)



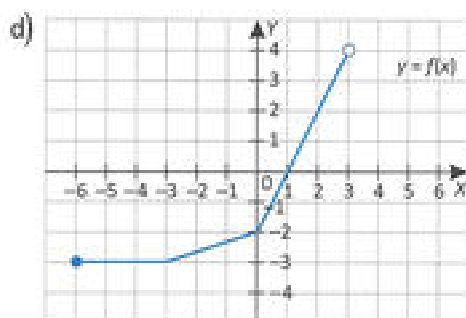
b)



c)



d)



1.89. Dany jest wzór funkcji f. Napisz wzór funkcji h, której wykres jest symetryczny względem osi OY do wykresu funkcji f. Podaj dziedzinę funkcji h. Naszkicuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych, jeśli:

a) $f(x) = x + 2$, gdzie $x \in \langle -4, 2 \rangle$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \in (-\infty, 0)$
c) $f(x) = -2$, gdzie $x \in \langle -5, 1)$
d) $f(x) = x^3 - 2$, gdzie $x \in \langle -1, 2 \rangle$
e) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$
f) $f(x) = (x+1)^2$, gdzie $x \in \langle -3, 1)$.

1.90. Wykres funkcji g powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f przez symetrię osiową względem osi OY. Napisz wzór funkcji g i podaj jej dziedzinę, jeśli:

a) $f(x) = 5x - 4$
b) $f(x) = \sqrt{x} + 2$
c) $f(x) = |x + 3|$
d) $f(x) = \frac{1}{x+6}$
e) $f(x) = \sqrt{x-4}$
f) $f(x) = \frac{2x}{1-x}$

1.91. Dana jest dziedzina i zbiór wartości funkcji f. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x) = f(-x)$.

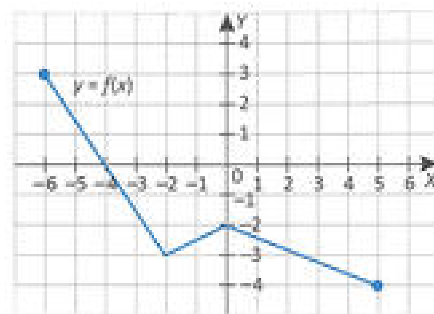
a) $D_f = \langle -4, 3)$, $ZW_f = (-1, 5\rangle$
b) $D_f = \mathbf{R} - \{3\}$, $ZW_f = \langle -4, +\infty)$

1.92. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = -|x| - 2$
b) $f(x) = (-x)^3 + 1$
c) $f(x) = -(x^3 + 1)$
d) $f(x) = -\sqrt{x+4}$
e) $f(x) = \sqrt{-x+4}$
f) $f(x) = (-x + 2)^2$.

1.93. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Dla każdej z funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = -f(x)$, podaj:

a) zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne
b) maksymalne przedziały, w których ta funkcja jest rosnąca
c) największą wartość tej funkcji
d) współrzędne punktu przecięcia wykresu tej funkcji z osią OY.



1.94. Funkcja f ma trzy miejsca zerowe: -5, 1, 6 oraz wiadomo, że $f(0) = 4$ i $f(3) = -2$. Podaj miejsca zerowe funkcji g i współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g z osią OY, jeśli:

a) $g(x) = f(-x)$
b) $g(x) = -f(x)$
c) $g(x) = -f(x + 3)$.

1.95. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = (x - 1)^3$ przez symetrię względem:

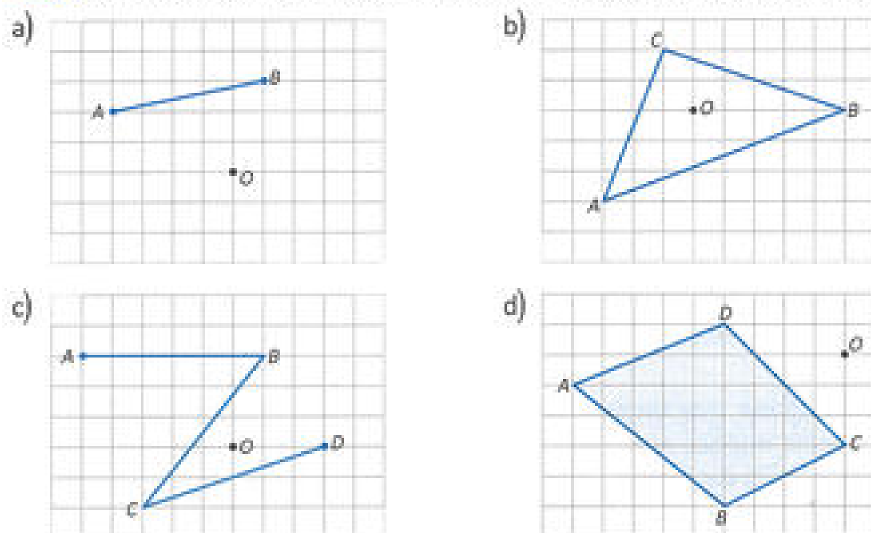
a) osi OX
b) osi OY.

1.96. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-x}{2x}$ przez symetrię względem:

a) osi OX
b) osi OY.

Symetria środkowa. Symetria środkowa względem punktu (O, O)

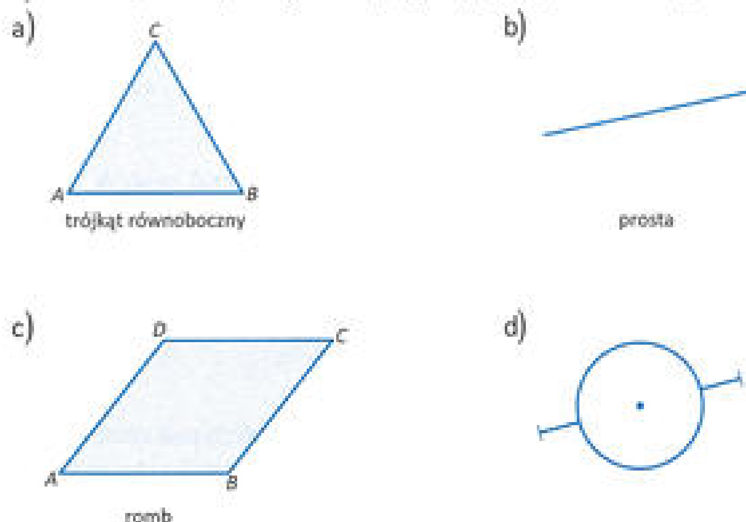
1.97. Znajdź obraz danej figury w symetrii środkowej względem punktu O, jeśli:



1.98. Zapoznaj się z poniższą definicją, a następnie wykonaj ćwiczenia.

„Punkt O nazywamy ***środkiem symetrii*** *figury F wtedy, gdy obrazem figury F w symetrii środkowej względem punktu O jest ta sama figura, czyli* $S_O(F) = F$. *Figury, które mają środek symetrii nazywamy* ***figurami środkowosymetrycznymi****."*

1) Wśród poniższych figur znajdują się figury środkowosymetryczne. Wskaż je.



2) Podaj przykład figury geometrycznej, która ma jeden środek symetrii, i figury geometrycznej, która ma nieskończenie wiele środków symetrii.

3) Narysuj dwie figury, które mają jednocześnie oś symetrii i środek symetrii.

1.99. Funkcja f jest opisana za pomocą tabelki:

a)

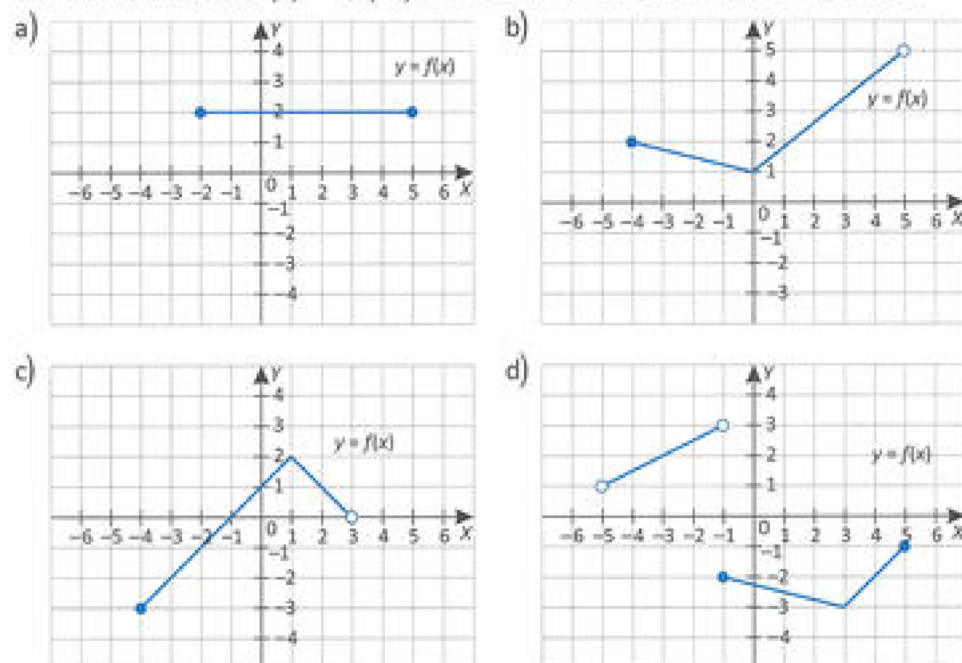
x	−4	−3	0	8	11	30	45
$f(x)$	−20	−8	−6	2	5	31	80

b)

x	−17	−12	10	26	103	115	170
$f(x)$	−2	−11	−90	27	24	1	−80

Opisz funkcję g za pomocą tabelki, jeśli $g(x) = -f(-x)$.

1.100. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji g, określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.



1.101. Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem punktu $(0,0)$. Naszkicuj wykresy funkcji f oraz g we wspólnym układzie współrzędnych. Napisz wzór funkcji g i podaj jej dziedzinę, jeśli:

a) $f(x) = x + 4$, gdzie $x \in \langle -3, 0)$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, 4)$

c) $f(x) = x^2$, gdzie $x \in \langle -1, 3\rangle$

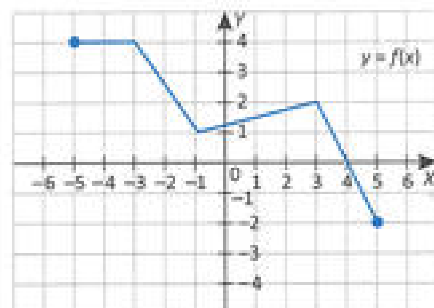
d) $f(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \in (1, 4\rangle$

e) $f(x) = -1$, gdzie $x \in \langle -5, 6\rangle$

f) $f(x) = |x|$, gdzie $x \in \langle -4, 2)$.

1.102. Na rysunku obok jest przedstawiony wykres funkcji f. Funkcję g określa wzór: $g(x) = -f(-x)$. Podaj:

a) zbiór wartości funkcji g
b) miejsce zerowe funkcji g
c) wartość wyrażenia $g(-3) \cdot g(3) - g(4)$
d) maksymalne przedziały, w których funkcja g jest malejąca.



1.103. Dana jest dziedzina i zbiór wartości funkcji f. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$.

a) $D_f = \langle -3, 7), ZW_f = (0, 4\rangle$
b) $D_f = (-1, 5), ZW_f = \langle -6, 2\rangle$
c) $D_f = (-\infty, 9\rangle, ZW_f = \mathbf{R} - \{-8\}$
d) $D_f = (-4, \sqrt{2}), ZW_f = \langle -1, +\infty)$

1.104. Dany jest wzór funkcji f. Napisz wzór funkcji g, której wykres otrzymamy przekształcając wykres funkcji f przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$. Oblicz miejsca zerowe i współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią OY (o ile istnieją).

a) $f(x) = -4x + 7$
b) $f(x) = 3$
c) $f(x) = x^2 - 1$
d) $f(x) = x^3 + 8$
e) $f(x) = \sqrt{x} - 1$
f) $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)$

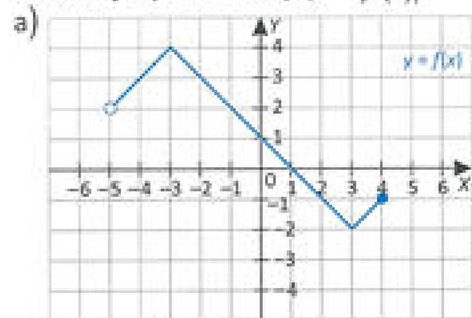
Wykres funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$

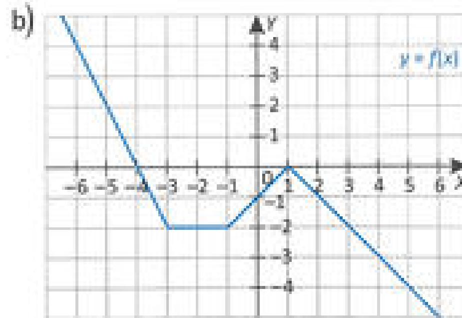
1.105. Funkcja f opisana jest tabelką w następujący sposób:

x	−3	−1	0	1	3	4	5
$f(x)$	−5	−7	−2	−4	1	2	−8

Sporządź tabelkę opisującą funkcję $y = |f(x)|$.

1.106. Na podstawie wykresu funkcji f, przedstawionego na poniższym rysunku, naszkicuj wykres funkcji $y = |f(x)|$.

a) 

b) 

1.107. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji $y = |f(x)|$.

a) $f(x) = x - 3$
b) $f(x) = 2x + 4$
c) $f(x) = \frac{-x}{2} - 1$
d) $f(x) = |x| - 2$

1.108. Naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = |x^2 - 4|$
b) $g(x) = |(x + 2)^3|$
c) $g(x) = \left|\frac{1}{x+3}\right|$
d) $g(x) = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$

1.109. Funkcja f opisana jest za pomocą tabeli. Sporządź tabelę, opisującą funkcję $y = f(|x|)$.

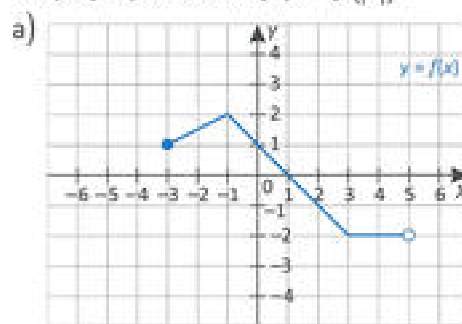
a)

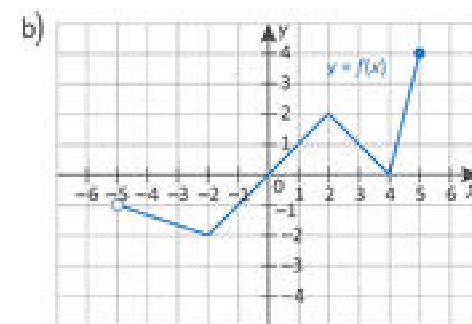
x	−13	−9	−5	−1	12	25	30
$y = f(x)$	−4	2	1	3	−8	−12	6

b)

x	−4	−2	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	8	4	0	−2	−4	−6	−8	−10	−12

1.110. Na podstawie wykresu funkcji f, przedstawionego na poniższym rysunku, narysuj wykres funkcji $y = f(|x|)$.

a) 

b) 

1.111. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(|x|)$.

a) $f(x) = (x + 1)^2$
b) $f(x) = (x - 2)^2$
c) $f(x) = x^3 - 1$
d) $f(x) = (x + 1)^3$

1.112. Naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = \sqrt{|x| - 1}$
b) $g(x) = \sqrt{|x| + 4}$
c) $g(x) = \frac{1}{|x| + 1}$
d) $g(x) = \frac{1}{|x| - 2}$

1.113. Funkcje f i g są określone w zbiorze liczb rzeczywistych R. Podaj zbiór wszystkich argumentów, dla których wykresy tych funkcji się pokrywają, jeśli:

a) $f(x) = |2x + 3|$, $g(x) = 2|x| + 3$ b) $f(x) = |x|^2 - 9$, $g(x) = |x^2 - 9|$.

1.114. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |x| - 3$

a) korzystając z wykresu funkcji $y = x - 3$

b) korzystając z wykresu funkcji $y = |x|$.

1.115. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = ||x| - 4|$

a) korzystając z wykresu funkcji $y = |x| - 4$

b) korzystając z wykresu funkcji $y = |x - 4|$.

1.116. Zbiorem wartości funkcji $y = f(x)$ jest podany zbiór ZW. Wyznacz zbiór wartości funkcji $y = |f(x)|$, jeśli:

a) $ZW = \langle 0, 5 \rangle$ b) $ZW = (-9, 3\rangle$

c) $ZW = \langle -10, -1) \cup \langle 2, 9)$ d) $ZW = (-3, -1) \cup \langle 2, 15)$.

1.117. Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest podany zbiór D. Wyznacz dziedzinę funkcji $y = f(|x|)$, jeśli:

a) $D = (-3, 4\rangle$ b) $D = (0, 7)$

c) $D = (-8, -3\rangle \cup \langle 2, 5\rangle$ d) $D = \{-3, 1\} \cup \langle 2, +\infty)$.

1.118. O funkcji $y = f(x)$ wiadomo, że ma trzy miejsca zerowe: –7, 2, 28. Podaj miejsca zerowe funkcji:

a) $y = f(|x|)$ b) $y = |f(x)|$.

1.119. Wykres funkcji $y = f(x)$ ma z osi OY punkt wspólny $P(0, -\sqrt{3})$. Podaj współrzędne punktu wspólnego osi OY z wykresem funkcji:

a) $y = |f(x)|$ b) $y = f(|x|)$.

1.120. Wykres funkcji f przecina osie układu współrzędnych w punktach: $(0, -8)$, $(3, 0)$, $(-4, 0)$, $(9, 0)$. Podaj współrzędne punktów przecięcia osi układu współrzędnych z wykresem funkcji:

a) $|f(x)|$ b) $f(|x|)$.

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ oraz $y = f(k \cdot x)$, gdzie $k \neq 0$

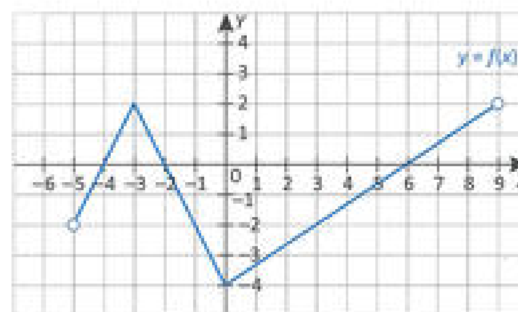
1.121. Narysuj w układzie współrzędnych trójkąt ABC, gdzie $A(0, 0)$, $B(3, -3)$, $C(6, 3)$. Wyznacz obraz $A_1B_1C_1$ tego trójkąta w powinowactwie prostokątnym o osi OX i skali k, jeśli:

a) $k = 3$ b) $k = \frac{1}{3}$ c) $k = -\frac{2}{3}$

1.122. Funkcja f opisana jest za pomocą tabeli. Sporządź tabelę, opisującą funkcję $y = 5 \cdot f(x)$.

x	–11	–8	–5	–2	1	4	7
$y = f(x)$	2	–3	4	–5	6	–7	0

1.123. Dany jest wykres funkcji f (zobacz rysunek poniżej).



Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji:

a) $y = 0{,}25f(x)$ b) $y = -\frac{1}{2}f(x)$ c) $y = 2f(x)$ d) $y = -0{,}75f(x)$

1.124. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji g, jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3f(x)$ b) $f(x) = |x|$, $g(x) = -2f(x)$

c) $f(x) = x - 6$, $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$ d) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$

1.125. Narysuj w układzie współrzędnych trójkąt ABC, gdzie $A(-4, 0)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$. Wyznacz obraz tego trójkąta wpowinowactwie prostokątnym o osi OY i skali k, jeśli:

a) $k = 2$ b) $k = -3$ c) $k = -\frac{5}{2}$

1.126. Funkcja f jest opisana za pomocą tabelki:

x	-15	-12	0	48	60
$y=f(x)$	2	-5	1	-3	7

Sporządź tabelę, opisującą funkcję:

a) $y=f(3x)$ b) $y=f(-4x)$ c) $y=f\left(\frac{2}{5}x\right)$ d) $y=f\left(-\frac{1}{4}x\right)$

1.127. Dany jest wzór funkcji f. Wyznacz dziedzinę funkcji g i naszkicuj jej wykres w układzie współrzędnych, jeśli:

a) $f(x)=x^2,\ x\in\langle -3, 2\rangle,\ g(x)=f(2x)$ b) $f(x)=\sqrt{x},\ x\in\langle 0, 2\rangle,\ g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c) $f(x)=\frac{1}{3}x+2,\ x\in(-3, 6),\ g(x)=f(-3x)$

d) $f(x)=x^3,\ x\in(-1, 2),\ g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

1.128. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji g, jeśli:

a) $f(x)=\sqrt{x+1},\ x\in\langle -1, 8\rangle$; $g(x)=f(-2x)$

b) $f(x)=x^2-2,\ x\in\langle -1, 2\rangle$; $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

c) $f(x)=x^3+1,\ x\in\langle -2, 1\rangle$; $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$

d) $f(x)=\frac{1}{x-2},\ x\in(2, 4\rangle$; $g(x)=-2f(x)$.

Napisz wzór funkcji g. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.

1.129. Na podstawie wykresu funkcji $f(x)=(x-1)^2$, gdzie $x\in\langle -1, 3\rangle$, naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$. Następnie wyznacz:

a) wzór i dziedzinę funkcji g,

b) przedział, w którym funkcja g jest malejąca.

1.130. Na podstawie wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{x+3}+1$ gdzie $x\in\langle -5, -3)\cup(-3, 1\rangle$, naszkicuj wykres funkcji $g(x)=-2f(x)$. Następnie wyznacz:

a) wzór i dziedzinę funkcji g,

b) zbiór wartości funkcji g.

1.131. Podaj, w jaki sposób należy przekształcić wykres funkcji:

a) $f(x)=\sqrt{x+1}$ b) $g(x)=\sqrt{x+4}$ c) $h(x)=2\sqrt{x}$

aby otrzymać wykres funkcji $y=\sqrt{4x+4}$.

1.132. Podaj, w jaki sposób należy przekształcić wykres funkcji:

a) $f(x)=-|x|+6$ b) $g(x)=|x|-3$ c) $h(x)=-2x+6$

aby otrzymać wykres funkcji $y=-2|x|+6$.

1.133. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -4, 12)$, a jej miejscami zerowymi są tylko dwie liczby: -3 oraz 4. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji g, określonej wzorem: $g(x)=f\left(\frac{1}{8}x\right)$.

1.134. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -8, 5\rangle$, a jej zbiorem wartości – przedział $(-2, 10)$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 6)$. Funkcja g jest opisana wzorem: $g(x)=-\frac{2}{3}f(x)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY.

1.135. O funkcji f wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór $(-6, 2\rangle$, zaś zbiorem wartości przedział $(-9, 4)$. Ponadto funkcja f ma tylko trzy miejsca zerowe: $-4, 0, 1$. Podaj dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe funkcji g, określonej wzorem: $g(x)=f(6x)$.

1.136. O funkcji f wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór $(-5, 10)$, zbiorem wartości przedział $\langle -12, 20\rangle$, zaś jej wykres przecina oś OY w punkcie o współrzędnych $(0, 2)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem: $g(x)=-4f(x)$. Jakie współrzędne ma punkt wspólny wykresu funkcji g i osi OY?

Szkicowanie wykresów wybranych funkcji

1.137. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz z wykresu funkcji $f(x)=x^2$, stosując następujące przekształcenia:

a) przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u}=[3, 1]$, następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi OX

b) symetria osiowa względem osi OX, następnie przesunięcie równoległe otrzymanego wykresu o wektor $\vec{u}=[3, 1]$

1.138. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz, stosując następujące przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$:

a) przesunięcie równoległe o wektor $[-4, -2]$, następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi OY

b) symetria osiowa względem osi OY, następnie przesunięcie równoległe otrzymanego wykresu o wektor $[-4, -2]$.

1.139. Jeśli chcemy naszkicować wykres funkcji $h(x) = -|2 - x| + 1$, to możemy zastosować następującą kolejność przekształceń:

$$f(x)=|x| \xrightarrow{T_{\vec{u}=[-2,-1]}} h_1(x)=|x+2|-1 \xrightarrow{S_{OX}}$$

$$h_2(x)=-|x+2|+1 \xrightarrow{S_{OY}} h(x)=-|2-x|+1.$$

Czy otrzymamy wykres funkcji $y = h(x)$, jeśli:

a) wykres funkcji $f(x) = |x|$ przesuniemy równolegle o wektor $[-2, 1]$, a następnie otrzymany wykres przekształcimy przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$

b) wykres funkcji $f(x) = |x|$ przekształcimy przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$, a następnie otrzymany wykres przesuniemy o wektor $[2, 1]$?

1.140. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |(x + 5)^3| - 8$, korzystając z następującej kolejności przekształceń:

$$f(x)=x^3 \xrightarrow{T_{\vec{u}=[-5,0]}} g_1(x)=(x+5)^3 \xrightarrow{y=|g_1(x)|}$$

$$g_2(x)=|(x+5)^3| \xrightarrow{T_{\vec{v}=[0,-8]}} g(x)=|(x+5)^3|-8.$$

Czy otrzymamy wykres funkcji $g(x) = |(x + 5)^3| - 8$, jeśli najpierw naszkicujemy wykres funkcji $y = |x|^3$, a następnie otrzymany wykres przesuniemy równolegle o wektor $\vec{u} = [-5, -8]$?

1.141. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{1}{x} - 3$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $h(x) = |f(x)|$. Wykres funkcji h przesuń równolegle o wektor $\vec{u} = [0, -2]$. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

b) Czy otrzymamy wykres tej samej funkcji, co w punkcie a), jeśli wykres funkcji $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ przesuniemy równolegle o wektor $\vec{u} = [-3, -2]$?

1.142. Aby naszkicować wykres funkcji $h(x) = f(|x - 5|)$, możemy ustalić następującą kolejność przekształceń:

$$y=f(x) \xrightarrow{y=f(|x|)} h_1(x)=f(|x|) \xrightarrow{T_{\vec{u}=[5,0]}} h(x)=f(|x-5|)$$

Czy otrzymamy wykres funkcji $y = h(x)$, jeśli zmienimy kolejność powyższych przekształceń? Odpowiedź uzasadnij.

1.143. Aby naszkicować wykres funkcji $h(x) = f(1 - x)$, możemy ustalić następującą kolejność przekształceń:

$$y=f(x) \xrightarrow{S_{OY}} h_1(x)=f(-x) \xrightarrow{T_{\vec{u}=[1,0]}} h_2(x)=f(1-x) \xrightarrow{y=h_2(|x|)} h(x)=f(1-|x|)$$

Czy ostatecznym efektem będzie wykres funkcji $y = h(x)$, jeśli na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicujemy wykres funkcji $y = f(|x|)$, otrzymany wykres przekształcimy przez symetrię osiową względem osi OY, a następnie otrzymany wykres przesuniemy równolegle o wektor $\vec{u} = [1, 0]$? Odpowiedź uzasadnij.

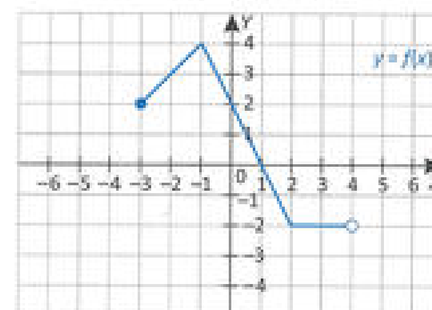
1.144. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Wykonując odpowiednie przekształcenia, naszkicuj wykres:

a) $y = -f(x - 3)$

b) $y = f(4 - x)$

c) $y = \dfrac{1}{2}f(-x - 2)$

d) $y = -2f(1 - x)$



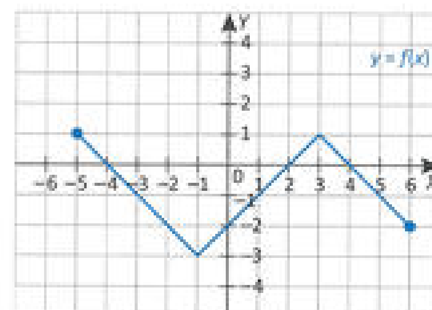
1.145. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Wykonując odpowiednie przekształcenia, naszkicuj wykres:

a) $y = -|f(x) - 1|$

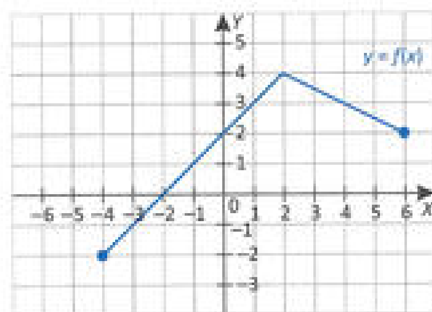
b) $y = |f(-x) + 2|$

c) $y = -|f(x)| + 3$

d) $y = |f(2 - x)| - 1$



1.146. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Wykonując odpowiednie przekształcenia, naszkicuj wykres:



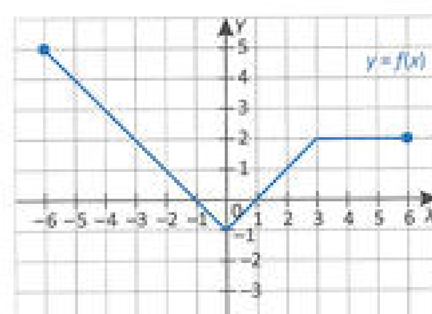
a) $y = -\frac{1}{4}f(|x|)$

b) $y = -f(|x-2|)$

c) $y = \frac{1}{2}f(|x| + 2)$

d) $y = 2 - f(|-3 + x|)$

1.147. Na rysunku obok dany jest wykres funkcji f. Wykonując odpowiednie przekształcenia, naszkicuj wykres:



a) $y = -f(x-3) + 4$

b) $y = \frac{1}{2}f(2x) - 3$

c) $y = |3 - f(2-x)|$

d) $y = 4 - f(|-x + 1|)$

1.148. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = -\sqrt{2-x} + 3$

b) $f(x) = \left|1 - \sqrt{-x}\right|$

c) $f(x) = \sqrt{|x-3|} - 2$

d) $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$

1.149. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = -|x-3| + 1$

b) $f(x) = -\left||x| - 2\right| + 3$

c) $f(x) = -\left|\sqrt{x^2+4x+4} - 5\right|$

d) $f(x) = \left|\left|\left|\sqrt{x^2} - 1\right| - 2\right| - 4\right|$

1.150. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = |x^2 - 1| - 2$

b) $f(x) = (|x| - 1)^2 - 2$

c) $f(x) = -(2 - |x|)^2$

d) $f(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3$

1.151. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = -\frac{2}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{1}{|x-3|} + 2$

c) $f(x) = \frac{3}{|x| - 1}$

d) $f(x) = \left|2 - \frac{1}{x-1}\right|$

1.152. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = -\left||x| - 3\right| - 1$

b) $f(x) = -2|x+1| - 3$

c) $f(x) = -\left||x-1| - 2\right|$

d) $f(x) = \left||x-1| - 2\right| - 3$

1.153. Naszkicuj wykres funkcji f jeśli:

a) $f(x) = 2 - \left||x|^3 - 1\right|$

b) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & \text{jeśli } x \leq -1 \\ |x| - 1, & \text{jeśli } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} + 1, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ \frac{1}{4}\cdot(x-3)^2 + 1, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \left||x| - 3\right|, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ -\left(\frac{1}{2}x\right)^3, & \text{jeśli } x \in \langle -2, 2 \rangle \end{cases}$

Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności

1.154. Odczytaj z wykresu funkcji $f(x) = (x+2)^2$ argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1. Następnie rozwiąż algebraicznie równanie $(x+2)^2 = 1$.

1.155. Odczytaj z wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{-x}$ argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 2. Następnie rozwiąż algebraicznie równanie $\sqrt{-x} = 2$.

1.156. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x-2| - 3$. Następnie podaj zbiór rozwiązań równania $f(x) = -2$.

1.157. Korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji rozwiąż równanie:

a) $|x| = x$ b) $\frac{1}{x-5} = -1$ c) $(x+2)^3 = -8$

1.158. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż równanie:

a) $x^2 - 2 = -x$ b) $(x-3)^2 = x - 1$ c) $-\frac{1}{x} + 1 = |x-1|$

1.159. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż równanie:

a) $x^3 = |x-2|$ b) $2 - x^2 = |x|$ c) $\sqrt{x+2} = \sqrt{x-6} + 2$

1.160. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x+3}$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 1$.

1.161. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{-x}$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 2$.

1.162. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 - 3$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

1.163. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = -\sqrt{-x}$ oraz $g(x) = |x| - 2$.

a) Podaj argument, dla którego funkcje f i g przyjmują tę samą wartość.

b) Rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$.

1.164. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż nierówność:

a) $x^3 > x$ b) $\sqrt{x-2} \leq 5 - \frac{1}{2}x$ c) $\sqrt{-x} \geq x + 2$

1.165. Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż nierówność:

a) $-|x| < \frac{1}{2}x - 3$ b) $\frac{-1}{x+1} \geq (x+1)^2$ c) $\frac{1}{x-4} - 1 > -|x-5|$

1.166. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{|x-3|}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Następnie rozwiąż:

a) równanie $f(x) = 1$ b) nierówność $f(x) < 1$

1.167. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{2}{x-1}\right|$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{1\}$. Następnie rozwiąż:

a) równanie $f(x) = 1$ b) nierówność $f(x) > 1$

1.168. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{|x|-1}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$. Następnie rozwiąż:

a) równanie $f(x) = 2$ b) nierówność $f(x) \leq 2$

1.169. Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań równania:

a) $||x| - 2| = \sqrt{x+4}$ b) $\frac{2}{x+3} = 1 - |x+1|$

b) $|x^3 - 2| = 6 - |x-2|$ d) $\frac{3}{|x|-1} = |x| - 3$

1.170. Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań nierówności:

a) $\frac{1}{2}x^3 \leq (x-2)^2 + 4$ b) $||x| - 5| < 3$

c) $2 - x^2 \geq \sqrt{|x|}$ d) $(|x| + 1)^2 \leq -|x| + 1$

1.171. Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań nierówności:

a) $4\sqrt{x+2} \geq |x+1| + 4$ b) $|(x-1)^2 - 4| > x + 1$

c) $5 - |x-3| > \frac{5}{4-x}$ d) $\frac{2}{|x|} \leq x^2 + 1$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Środek odcinka AB ma współrzędne $(13, -2)$. Jeśli $A(-7, 4)$, to:

A. $B(3, 1)$ B. $B(10, -6)$ C. $B(23, 8)$ D. $B(33, -8)$

2. Wektorem przeciwnym do wektora $\vec{a} = [4, -5]$ jest wektor o współrzędnych:

A. $\left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right]$ C. $[5, -4]$ D. $[-4, 5]$

3. Długość wektora $\vec{b} = [-3, 4]$ jest równa:

A. 7 B. 5 C. 4 D. 3

4. Jeśli $A(9, -2)$ i $\overrightarrow{AB} = [-6, 7]$, to punkt B ma współrzędne:

A. $(-3, -5)$ B. $(3, 5)$ C. $(5, 3)$ D. $(3, -5)$

5. Dany jest wektor $\vec{u} = [3, -2]$. Wskaż wektor, który nie jest równoległy do wektora $\vec{u}$.

A. $\vec{a} = \left[\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$ B. $\vec{b} = [-3, 2]$ C. $\vec{c} = [57, -38]$ D. $\vec{d} = [-2, 3]$

6. W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ o 4 jednostki do góry otrzymamy wykres funkcji:

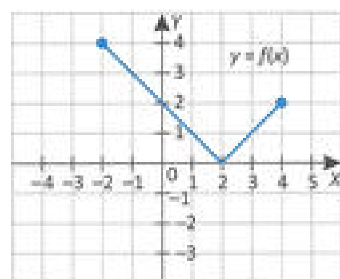
A. $g(x) = \sqrt{x} + 4$ B. $g(x) = \sqrt{x} - 4$

C. $g(x) = \sqrt{x+4}$ D. $g(x) = \sqrt{x-4}$

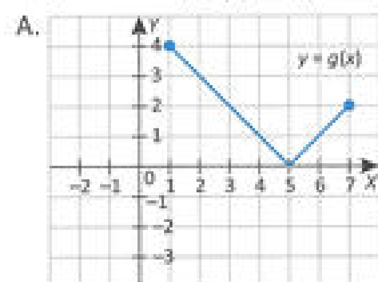
7. Wykres funkcji $f(x) = |x + 5| + 1$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = |x|$ o wektor:

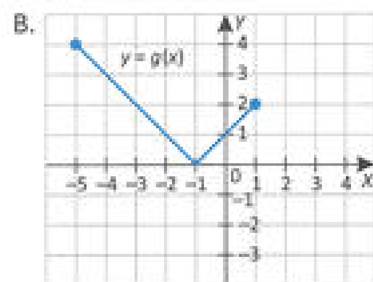
A. $\vec{u} = [5, 1]$ B. $\vec{u} = [5, -1]$ C. $\vec{u} = [-5, 1]$ D. $\vec{u} = [-5, -1]$

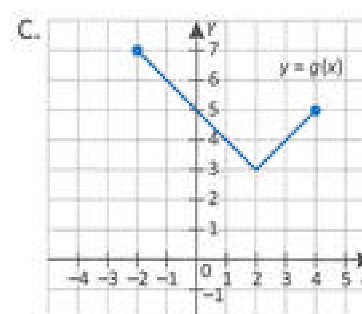
8. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.

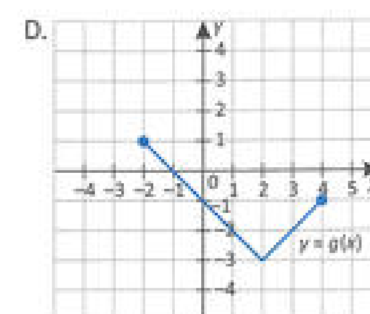


Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ przedstawiony jest na rysunku:

A.


B.


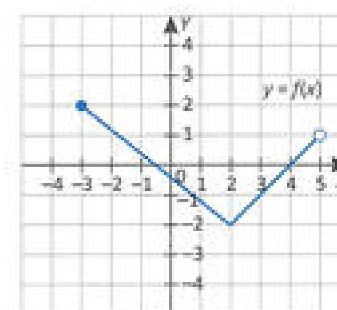
C.


D.


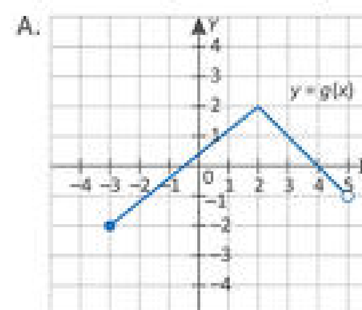
9. W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ przez symetrię względem osi OX otrzymujemy wykres funkcji, określonej wzorem:

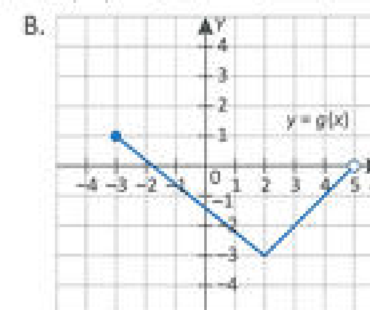
A. $y = x^2 + 3x + 2$ B. $y = x^2 - 3x - 2$ C. $y = -x^2 - 3x + 2$ D. $y = x^2 - 3x + 2$

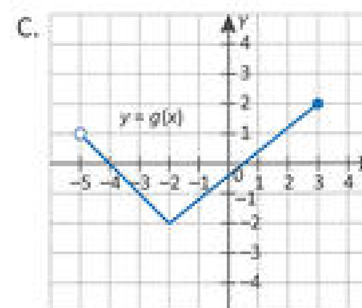
10. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.

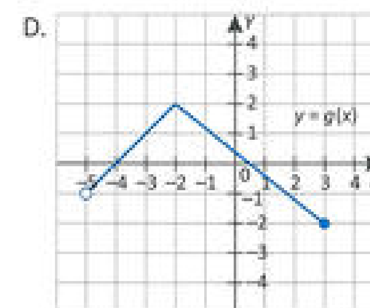


Wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = -f(-x)$ znajduje się na rysunku:

A.


B.


C.


D.


11. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -3, 2)$. Wykres funkcji f przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji g. Dziedziną funkcji g jest przedział:

A. $\langle -2, 3)$ B. $(-2, 3\rangle$ C. $\langle -3, 2)$ D. $(-3, 2\rangle$

12. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -5, 1)$. Wykres funkcji f przekształcono przez symetrię osiową względem osi OX i otrzymano wykres funkcji g. Wskaż zbiór wartości funkcji g.

A. $\langle -5, 1)$ B. $(-5, 1\rangle$ C. $(-1, 5\rangle$ D. $\langle -1, 5)$

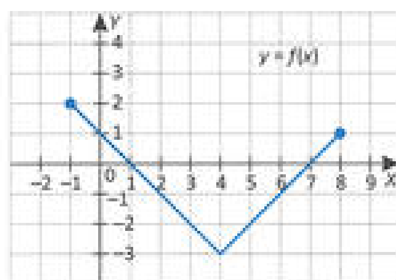
13. Funkcja $y = f(x)$ ma dwa miejsca zerowe: -3 oraz 1. Miejscami zerowymi funkcji $y = f(x + 1)$ są liczby:

A. -2 oraz 2 B. -4 oraz 0 C. -2 oraz 0 D. -4 oraz 2

14. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji f, określonej w przedziale $\langle -1, 8\rangle$. Wskaż zbiór rozwiązań równania $-f(x + 1) = 2$.

A. $\{-1\}$ B. $\{3, 5\}$

C. $\{2, 4\}$ D. $\{4, 6\}$



15. Wykres funkcji f jest przedstawiony w zadaniu 14. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $f(-x) + 1 > 0$.

A. $(2, 6)$ B. $\langle -1, 2)\cup(6, 8\rangle$ C. $\langle -8, -6)\cup(-2, 1\rangle$ D. $(0, 8)$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

16. Dany jest punkt $B(4, -3)$ oraz wektor $\overrightarrow{AB} = [-2, 5]$. Oblicz:

a) współrzędne punktu A,

b) współrzędne punktu C, jeśli $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$.

17. W trójkącie ABC dane są: $A(-7, -1)$, $B(5, 1)$ oraz $\overrightarrow{BD} = [-9, 1]$, gdzie D to środek boku AC. Oblicz współrzędne punktu D oraz dugość boku AC.

18. W trójkącie ABC dane są: $A(-5, 2)$, $B(3, -4)$, $C(1, 5)$. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby figura $ABCD$ była równoległobokiem.

D **19.** Dane są punkty: $A(0, -3)$, $B(4, -1)$, $C(5, 3)$, $D(-3, -1)$. Korzystając z własności wektorów wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

20. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -x^2 + 10$. Wykres funkcji g powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji f o 3 jednostki w lewo.

a) Napisz wzór funkcji g.

b) Do wykresu funkcji g należy punkt $(-2, a)$. Oblicz a.

21. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 3x + 5$ przesunięto o 2 jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji g.

a) Podaj wzór funkcji g.

b) O jaki wektor można przesunąć wykres funkcji g wzdłuż osi OY, aby otrzymać wykres funkcji f?

D **22.** Wykres funkcji $f(x) = -2x^2$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{v} = [1, 4]$ i otrzymano wykres funkcji g. Wykaż, że $g(x) = -2x^2 + 4x + 2$.

23. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = -2x + 3$. Napisz wzór funkcji:

a) g, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OX,

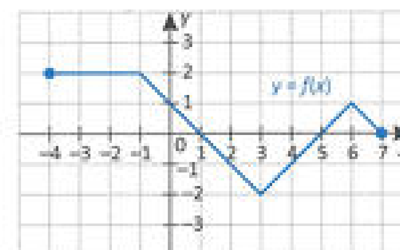
b) h, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OY,

c) k, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem punktu $O(0, 0)$.

24. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = g(x)$, gdzie $g(x) = -f(x)$.

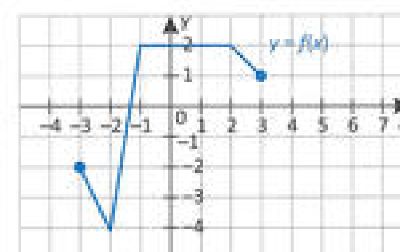
b) Podaj zbiór rozwiązań równania $g(x) = -2$.



25. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = g(x)$, gdzie $g(x) = f(-x)$.

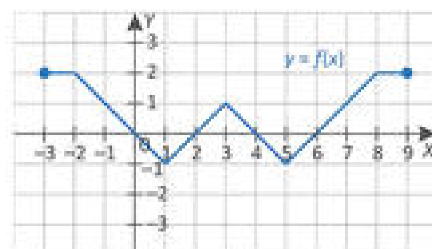
b) Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja g jest rosnąca.



26. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = g(x)$, gdzie $g(x) = f(x + 2) - 1$.

b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) < 0$.



27. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle -4, 8\rangle$, a jej zbiorem wartości jest zbiór $ZW_f = \langle -1, +\infty)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a) $y = f(-x)$ b) $y = -f(x)$ c) $y = f(x + 3) - 4$

28. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, gdzie $x \in \langle -2, 0) \cup (0, 2\rangle$.

a) Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$.

b) Na podstawie wykresu funkcji g rozwiąż nierówność $g(x) \leq -1$.

29. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $\frac{1}{x+5} = -x - 3$ b) $(x - 1)^2 = 2x - 2$ c) $-|x| = x^2 - 6$

30. Rozwiąż graficznie nierówność:

a) $-x^3 \geq \sqrt{-x}$ b) $|x - 2| > x^2$ c) $\frac{-4}{x+1} \leq x + 6$

31. Podaj dwa kolejne przekształcenia, które można wykonać, aby z wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ otrzymać wykres funkcji:

a) $g(x) = 7 - \sqrt{x}$ b) $h(x) = \sqrt{7 - x}$ c) $k(x) = -\left(\sqrt{-x} + 7\right)$

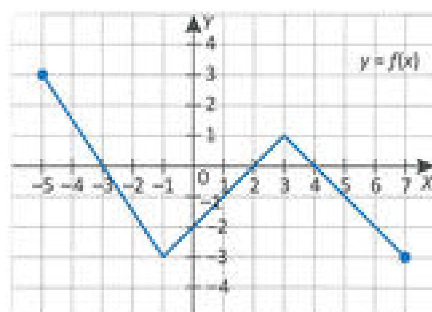
32. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f.

a) Naszkicuj wykres funkcji g, określonej wzorem $g(x) = f(-x) + 1$.

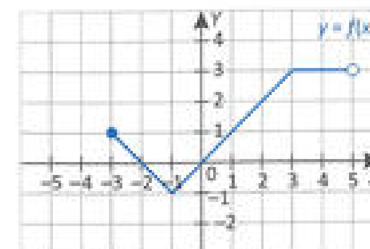
b) Podaj dziedzinę funkcji g.

c) Podaj zbiór wartości funkcji g.

d) Oblicz wartość wyrażenia $\left[g(-4) + g(5)\right] \cdot \left[g(-3) - g(1)\right]$.



33. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Wykres funkcji $y = g(x)$ otrzymujemy na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ w wyniku następujących przekształceń:



$$y = f(x) \xrightarrow{T_{\vec{u}=[-1,0]}} y = f_1(x) \xrightarrow{y = f_1(|x|)} y = f_2(x) \xrightarrow{S_{Ox}} y = f_3(x) \xrightarrow{T_{\vec{v}=[0,1]}} y = g(x)$$

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = g(x)$.

b) Napisz wzór funkcji g za pomocą wzoru funkcji f.

34. Na lekcji matematyki dwoje uczniów przedstawiło swój pomysł na naszkicowanie wykresu funkcji g, określonej wzorem $g(x) = 2 - \frac{1}{4}\sqrt{x+3}$, na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Pomysł Konrada

$$y = f(x) \xrightarrow{T_{\vec{u}=[-3,0]}} y = f_1(x) \xrightarrow{y = \frac{1}{4} f_1(x)} y = f_2(x) \xrightarrow{S_{Ox}} y = f_3(x) \xrightarrow{T_{\vec{v}=[0,2]}} y = g(x)$$

Pomysł Wiktorii

$$y = f(x) \xrightarrow{T_{\vec{u}=[-3,-8]}} y = f_1(x) \xrightarrow{y = \frac{1}{4} f_1(x)} y = f_2(x) \xrightarrow{S_{Ox}} y = g(x).$$

a) Wykaż, że oba przedstawione rozwiązania są poprawne.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = g(x)$ każdą z przedstawionych metod.

35. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $-2x + \frac{1}{2}x^3 = 0$ b) $\frac{1}{2}(x + 2)^2 = 2 - |x|$

36. Rozwiąż graficznie nierówność:

a) $(x - 1)^2 < |x - 1| + 2$ b) $\sqrt{|x| + 2} \geq \frac{2}{x-1}$

37. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{|x|-1}$, a następnie:

a) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g,

b) wyznacz przedziały monotoniczności funkcji g,

c) wykaż, że funkcja g jest parzysta,

d) rozwiąż nierówność $\frac{2}{|x|-1} \geq |x|$.

38. Jednym z rozwiązań równania $\frac{2}{|x|-2} = |x| + m$ z niewiadomą x i parametrem m jest liczba -4.

a) Oblicz m.

b) Dla wyznaczonej wartości parametru m, na podstawie wykresów odpowiednich funkcji, wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $\frac{2}{|x|-2} > |x| + m$.

39. Jednym z rozwiązań równania $\sqrt{|x|} = \frac{1}{2}m - x^2$ z niewiadomą x i parametrem m jest liczba 1.

a) Oblicz m.

b) Dla znalezionej wartości parametru m określ liczbę rozwiązań równania $\sqrt{|x|} = \left|\frac{1}{2}m - x^2\right|$.

40. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \left|\frac{1}{2} \cdot |x+4| - 2\right|$.

a) Na podstawie wykresu funkcji g rozwiąż równanie $g(x) = 1$.

b) Podaj wzór funkcji g bez użycia znaku wartości bezwzględnej.

c) Wykaż, że w przedziale $(-8, -4)$ funkcja g jest rosnąca.

41. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = (|x| - 3)^2 - 4$.

a) Podaj zbiór wartości funkcji g.

b) Oblicz miejsca zerowe funkcji g.

c) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \geq 0$.

2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

2.1. Oblicz:

a) $\left|-2\frac{1}{2}\right| + \left|1\frac{1}{2}\right|$ b) $\left|-2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}\right|$ c) $|-2,6| - |-3,3|$

d) $|\sqrt{2} - 3|$ e) $|2 - \sqrt{5}|$ f) $|-2\sqrt{3} + \sqrt{12}|$

2.2. Oblicz wartość danego wyrażenia. Oceń, jaką liczbą – wymierną czy niewymierną – jest wynik obliczeń.

a) $2\sqrt{3} - |3 - 2\sqrt{3}|$ b) $2\pi - |2\pi - 7|$

c) $|3 - \sqrt{2}| - |\sqrt{2} + 1,3|$ d) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |2\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

e) $|3 - \pi| - |\pi - 3|$ f) $|1 - \sqrt{3}| + |-1 + \sqrt{3}|$

2.3. Oblicz wartość danego wyrażenia. Oceń, jaką liczbą – wymierną czy niewymierną – jest wynik obliczeń.

a) $3|1 - \sqrt{6}| - 3\sqrt{6}$ b) $|1 - \sqrt{2}| \cdot |-\sqrt{2}|$

c) $|1,8 - \sqrt{3}| + (-1)|\sqrt{3} - 3|$ d) $-|-8| - |8 - \pi^2|$

2.4. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\left|(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{6})\right| - 3 \cdot \left(\sqrt{20} - 2 \cdot |\sqrt{5} - 2|\right)$

b $\left(|\sqrt{75} - 4\sqrt{3}| - |\sqrt{27} - \sqrt{108}| + 1\right) \cdot (1 + 2\sqrt{3})$

c) $|4\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 5| \cdot |-2\sqrt{2} - 5|$

d) $|3\sqrt{5} - 2\sqrt{125} + 10| \cdot |7\sqrt{5} - 10|$

2.5. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{\left|\sqrt{12}-5\right|}{\left|\sqrt{3}-2\right|}+\left|4-\sqrt{3}\right|$

b) $\dfrac{\left|4-2\sqrt{5}\right|\cdot\left|\sqrt{20}-4\right|}{\left|-4\left(4\sqrt{5}-9\right)\right|}$

c) $\dfrac{\left|\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\right|}{2\sqrt{2}-3}$

d) $\dfrac{\left|\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)\right|}{\left|\sqrt{5}-1\right|\cdot\left|1-\sqrt{5}\right|}+\dfrac{3}{6+2\sqrt{5}}$

2.6. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $2a\cdot|a-3|$, jeśli $a=-4$

b) $|2a-3|\cdot(3+2a)$, jeśli $a=-\sqrt{3}$

2.7. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\left|-1-|2-b|\right|+b$, jeśli $b=3$

b) $b-|-b+1|$, jeśli $b=\sqrt{2}$

2.8. Oblicz wartość wyrażenia $\left||a^2-200|-3a\right|+2a$ w przypadku, gdy:

a) $a=-10$

b) $a=\sqrt[3]{20\cdot3^3+2\cdot3^4+5\cdot3^5+2\cdot3^6}$

2.9. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

a) $|a-2|$, jeśli $a\in\langle 2,+\infty)$

b) $|3+a|$, jeśli $a\in(-\infty,-3)$

c) $|3a-2|$, jeśli $a\in\langle 1,+\infty)$

d) $|4-8a|$, jeśli $a\in\langle 1,+\infty)$

2.10. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

a) $|-2a|\cdot|a-1|$, jeśli $a\in(-\infty,-1)$

b) $|1+2a|+|-3a|$, jeśli $a\in(-\infty,-2)$

c) $2a-\left|3-|a|\right|$, jeśli $a\in(4,+\infty)$

d) $|2a|-\left|1-|a|\right|$, jeśli $a\in(-\infty,-3)$

2.11. Napisz wzór funkcji f bez użycia symbolu wartości bezwzględnej. Następnie naszkicuj wykres funkcji f w układzie współrzędnych.

a) $f(x)=x-|x|$

b) $f(x)=2|x+3|$

c) $f(x)=3-|3-3x|$

d) $f(x)=-\left|1-\dfrac{1}{3}x\right|+2$

2.12. Napisz wzór funkcji f bez użycia symbolu wartości bezwzględnej. Następnie naszkicuj wykres funkcji f w układzie współrzędnych.

a) $f(x)=x\cdot|x|$

b) $f(x)=\dfrac{|2x|}{x}+1$

c) $f(x)=|0{,}5x-1|+x$

d) $f(x)=x-|4+x|$

D **2.13.** Wykaż, że wartość podanego wyrażenia jest stała.

a) $|a-3|-|a-2|$, jeśli $a\in(-\infty,0)$

b) $|4-a|+|2+a|$, jeśli $a\in(-2,4)$

c) $|a-3|-|a+4|$, jeśli $a\in(3,+\infty)$

d) $|a+1|-|a+5|$, jeśli $a\in(-\infty,-5)$

D **2.14.** Wykaż, że jeśli a jest liczbą ujemną i b jest liczbą dodatnią, to $|-3a+4b|-2|3b-a|=-a-2b$.

D **2.15.** Wykaż, że jeśli liczby x i y są ujemne, to $|2x+y|\cdot|-2x-y|-|4x^2+y^2|=4xy$.

D **2.16.** Wykaż, że jeśli $a>b>0$, to $2(b^2-|ab|)+|b-a|\cdot|a+b|>0$.

2.17. Oblicz:

a) $\left|\left|1+\log_{\frac{1}{3}}9\right|-\left|5+8^{\frac{1}{3}}\right|\right|\cdot\left|-2\log_2 4-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right|$

b) $2-\left|2\log_5 25-81^{\frac{3}{4}}\right|-\left|\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\right|$

c) $\left|-3\log_{\frac{1}{2}}0{,}25-\sqrt[3]{216}\right|-\left|0{,}75^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{3}\right|\cdot\sqrt{3}$

d) $\left|3^{\log_3 2}-5\right|\cdot16^{\frac{3}{4}}-0{,}5^{-3}\left|-\log_{81}9\right|$

Odległość między liczbami na osi liczbowej. Geometryczna interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej

2.18. Dane są liczby a i b. Wyznacz na osi liczbowej liczbę c równoodległą od liczb a i b. Jaka jest odległość d liczby c od liczb a i b?

a) $a=-2$ i $b=4$

b) $a=-2$ i $b=5$

c) $a=-8{,}4$ i $b=1{,}5$

d) $a=3\frac{1}{3}$ i $b=87\frac{5}{6}$

e) $a=-3\sqrt{7}$ i $b=-29\sqrt{7}$

f) $a=-9+4\sqrt{5}$ i $b=5-2\sqrt{5}$

2.19. Wyznacz liczby, które znajdują się na osi liczbowej w odległości d od liczby a, jeśli:

a) $a = 2,\ d = 3$
b) $a = -2,\ d = 5$
c) $a = -7,\ d = 26$
d) $a = \sqrt{2},\ d = 3$
e) $a = -3,\ d = \pi + 1$
f) $a = 1 + \sqrt{3},\ d = 4 - \sqrt{3}$

2.20. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, których:

a) odległość na osi liczbowej od liczby 1 jest mniejsza od 5 lub równa 5,
b) odległość na osi liczbowej od liczby 3 jest mniejsza od 4,
c) odległość na osi liczbowej od liczby −2 jest większa od 3 lub równa 3,
d) odległość na osi liczbowej od liczby −5 jest większa od 2,
e) odległość na osi liczbowej od liczby 6 jest nie mniejsza niż 1,
f) odległość na osi liczbowej od liczby −4 jest nie większa niż 5.

2.21. Zapisz odległość na osi liczbowej między danymi liczbami, używając znaku wartości bezwzględnej. Następnie oblicz tę odległość.

a) -4 i -28
b) $-14\frac{2}{3}$ i $16\frac{2}{3}$
c) π i $2\sqrt{3}$
d) $-2\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}+3$
e) $\sqrt{3}-1$ i $\sqrt{3}+7$
f) $1-2\sqrt{3}$ i $4+2\sqrt{3}$

2.22. Zapisz poniższe zdanie, używając symbolu wartości bezwzględnej.

a) Odległość liczby x od liczby 0 jest równa 8.
b) Odległość liczby y od liczby 5 jest równa 1.
c) Odległość liczby (-3) od liczby a jest równa 4.
d) Odległość liczby z od liczby 8 jest mniejsza od 3.
e) Odległość liczby p od liczby −2 jest większa od 7.
f) Odległość liczby k od liczby −1 jest nie większa od 5.
g) Odległość liczby 7 od liczby m jest nie mniejsza od 2.

2.23. Wyznacz odległość między danymi liczbami a i b w zależności od m, jeśli:

a) $a = 12 - 3m$, $b = 5m - 4$ i $m \in (-\infty, 2\rangle$
b) $a = \frac{12m}{5} - 9$, $b = 6 - 3{,}6m$ i $m \in (3, +\infty)$
c) $a = m^2 + 5m - 6$, $b = (m+3)^2$ i $m \in (0, +\infty)$
d) $a = (m-4)^2$, $b = -8m - 17$ i $m \in \mathbf{R}$.

Proste równania z wartością bezwzględną

2.24. Sprawdź, które z podanych liczb są rozwiązaniami równania:

a) $2|x| = 6$ 0, −3, 3
b) $|x+3| = 7$ −4, −10, 4
c) $|x-2| = -6$ 0, −4, 2
d) $|x+5| = 0$ 0, 3, −5

2.25. Rozwiąż równanie:

a) $|x| = \frac{1}{5}$
b) $|x| = -2$
c) $3|x| = \sqrt{18}$
d) $5|x| + 10\sqrt{3} = 0$
e) $-\frac{|x|}{3} + 1 = 1$
f) $\frac{3|x|+1}{2} = 5$

2.26. Rozwiąż dane równanie, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a) $|x-2| = 3$
b) $|x+1| = 4$
c) $|3-x| = 0$
d) $|2+x| = 1$
e) $|x-5| = 2$
f) $|-4+x| = 5$

2.27. Rozwiąż dane równanie, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a) $|9+x| = 0$
b) $|3-x| = 8$
c) $|16+x| = 5$
d) $|x-21| = 3$
e) $|-1-x| = 7$
f) $|-2-x| = -2$

2.28. Zapisz równanie z niewiadomą x typu $|x-a| = b$, które:

a) ma jedno rozwiązanie, równe 11,
b) ma jedno rozwiązanie, równe −19,
c) jest sprzeczne,
d) ma dwa rozwiązania: −8 i 8,
e) ma dwa rozwiązania: −3 i 7,
f) ma dwa rozwiązania: 3π i -7π.

2.29. Zapisz równanie z niewiadomą x typu $|x-a| = b$, którego zbiorem rozwiązań jest zbiór:

a) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$
b) $\{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$
c) $\{-3\sqrt{5}\}$
d) $\{5, 17\}$
e) $\left\{-8\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right\}$
f) $\left\{-2\frac{1}{3}, 5\frac{2}{3}\right\}$

2.30. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $|x-1|=2$ b) $|x-4|=0$ c) $|-x-1|=4$

d) $|2+x|=3$ e) $|x-3|+7=0$ f) $1-|x+5|=0$

2.31. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $|x-1{,}2|-6{,}8=0$ b) $|3{,}4-x|=0{,}6$ c) $-|2{,}5+x|=0$

d) $7|-x-5|=-21$ e) $0{,}2|x-1|=0{,}4$ f) $-0{,}1|-3-x|=-1$

2.32. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $\frac{3|x-2|}{4}=1{,}5$ b) $\frac{|x+2{,}4|+1{,}2}{3}=1$ c) $\frac{5|3+x|-1{,}2}{8}=0$

d) $\frac{4-|-x+2|}{3}=4{,}8$ e) $\frac{|3-x|-5{,}3}{2}=8$ f) $\frac{6-2|-x-1|}{3}=-4$

2.33. Rozwiąż równanie:

a) $|x-\sqrt{2}|+3=\sqrt{2}$ b) $3|2\sqrt{5}-x|=21-9\sqrt{5}$

c) $\frac{|x-2\sqrt{3}|-1}{3}=2-\sqrt{3}$ d) $0{,}2|-x-5\sqrt{2}|=\frac{1}{5}+\sqrt{2}$

e) $\frac{|\sqrt{2}-x|+\sqrt{2}}{3}=1$ f) $\frac{|x+2\sqrt{3}|-2}{\sqrt{3}}=4$

2.34. Rozwiąż równanie:

a) $|3x+7|=2$ b) $|25x-3|=122$ c) $|9-4x|=21$

d) $|1-2x|=13$ e) $|-8x+5|=11$ f) $|-2-5x|=16$

2.35. Rozwiąż równanie graficznie, szkicując wykres odpowiedniej funkcji.

a) $|x+4|=2$ b) $|3-x|=1$ c) $|1+x|-4=0$

d) $-|x-1|=5$ e) $|2x-6|=0$ f) $|0{,}5x+1|=2$

2.36. Dane są zbiory:

$A=\{x\colon x\in \mathbf{R} \wedge 3|2-x|=4-|x-2|\}$

$B=\{x\colon x\in \mathbf{R} \wedge |x+5|=2|-5-x|\}$

$C=\{x\colon x\in \mathbf{R} \wedge 2(|x+1|-3)=|1+x|-2\}$.

a) Wypisz elementy zbiorów A, B, C.

b) Wyznacz zbiory: $(B\cup C)\cap A$, $(A-C)\cup B$, $C-A-B$.

2.37. Rozwiąż równanie:

a) $12-6|x|-3(|x|+5)=4(|x|-1)-25$

b) $|x+3|-5(|x+3|-1)=4|-x-3|+2|-3-x|-45$

c) $(-2|4-x|+|x-4|)\cdot 3=5|-4+x|-16$

d) $\frac{2|5+x|-7}{4}=\frac{|-x-5|-10}{3}+|-5-x|$

e) $\frac{3|2-x|-4}{2}-\frac{6-|x-2|}{5}=7\frac{3}{5}-|-2+x|$

f) $-\frac{4|7+x|-3}{6}+\frac{|-x-7|+1}{3}=2-\frac{4-|-7-x|}{2}$

2.38. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{2\cdot(|x-3|-3\sqrt{2})}{5}-\frac{3|x-3|-\sqrt{2}}{2}=-\frac{6|3-x|+17\sqrt{2}}{10}$

b) $\frac{6|x+6|-(|-x-6|+4\sqrt{5})}{3}-4=|x+6|-2\sqrt{5}$

c) $|4\sqrt{3}-x|-\frac{|x-4\sqrt{3}|+2\sqrt{3}}{2}=\frac{2|-x+4\sqrt{3}|}{3}-1-\sqrt{3}$

d) $\frac{3|-x-3|-2\sqrt{2}}{2}-\frac{2|3+x|+\sqrt{2}-1}{4}=\frac{5|x+3|-\sqrt{2}-1}{8}$

2.39. Wyznacz liczbę m wiedząc, że jednym z rozwiązań danego równania z niewiadomą x jest liczba podana obok równania. Dla wyznaczonej wartości m znajdź drugie rozwiązanie tego równania (o ile istnieje).

a) $|x-m+1|=2$, 5 b) $|3-x+m|=0$, 1

c) $|-x-m+5|=9$, 7 d) $|x+m^2-4|=1$, 4

2.40. Podaj przykład równania z niewiadomą x typu $|x-a|=b$, które ma:

a) jedno rozwiązanie ujemne,

b) dwa rozwiązania różnych znaków,

c) dwa rozwiązania dodatnie,

d) dwa rozwiązania ujemne,

e) dwa rozwiązania, z których jedno jest dodatnie, a drugie równe zeru,

f) dwa rozwiązania, z których jedno jest ujemne, a drugie równe zeru.

Proste nierówności z wartością bezwzględną

2.41. Sprawdź, która z liczb podanych obok nierówności spełnia tę nierówność, jeśli:

a) $|5-x| \le 2$ $\quad 0, 3, 6, 7$ b) $|x+1| > 5$ $\quad -9, -4, -1, 6$

c) $|x-4| > 0$ $\quad -2, 3\frac{1}{2}, 4, 5$ d) $|-x-2| \le 0$ $\quad -3, -2, 0, 1$

2.42. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

a) $|x| \le 0$ b) $|x+1| > 0$ c) $-|x| \le 9$ d) $2|x| < -4$

2.43. Podaj przykład nierówności z wartością bezwzględną, której zbiorem rozwiązań jest:

a) zbiór pusty b) zbiór jednoelementowy

c) zbiór liczb rzeczywistych d) zbiór $\boldsymbol{R} - \{3\}$

2.44. Rozwiąż nierówność, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a) $|x| < 4$ b) $|x| \ge 6$ c) $|x| > 9$

d) $|x| \le 2$ e) $|x| - 5 \le 3$ f) $2|x| - 2\sqrt{3} > 0$

2.45. Rozwiąż nierówność, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a) $|x-4| < 3$ b) $|x+1| \le 2$ c) $|x-2| > 0$

d) $4 - |1-x| \ge 0$ e) $|3-x| - 1 \le 0$ f) $|5+x| - 2 > 0$

2.46. Rozwiąż nierówność, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a) $|x+1| - 2 > 0$ b) $1 - |x-1| \le 0$ c) $-3|x| + 8 > 2$

d) $0 < 4 - |x-4|$ e) $-|9-x| \ge -3$ f) $3 - 3|6+x| < 0$

2.47. Zapisz nierówność z wartością bezwzględną, jeśli dany jest jej zbiór rozwiązań.

a) $(-9, 9)$ b) $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ c) $(-4, 12)$

d) $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ e) $(-\infty, 5) \cup (7, +\infty)$ f) $\langle 0, 10\rangle$

g) $\langle -9, 5\rangle$ h) $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ i) $(-2\pi, 4\pi)$.

2.48. Korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji rozwiąż graficznie nierówność:

a) $|x-5| > 1$ b) $|x+3| \le 2$ c) $|4+x| \ge 3$

d) $|2x-4| \le 0$ e) $|0{,}5x-1| > 2$ f) $-|2(x+1)| > -4$

2.49. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $|x+1{,}4| - 8{,}4 \le 0$ b) $0 > 1{,}4 - |2{,}6-x|$ c) $|0{,}25+x| \ge 1{,}25$

d) $10|x-1{,}3| < 18$ e) $|0{,}3x+1| \le 0$ f) $-2|x-0{,}3| + 3 > 0$

2.50. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $\left|x-\sqrt{2}\right| < 1$ b) $\left|\sqrt{3}+x\right| \ge 2\sqrt{3}$ c) $\left|-x-\sqrt{5}\right| \le 0$

d) $|3-x| < 2-\sqrt{6}$ e) $\left|x-\sqrt{2}+1\right| > 1$ f) $\left|x+\sqrt{3}+5\right| < 4$

2.51. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $|3x+13| \le 100$ b) $|12x-2| < 50$ c) $|4-5x| > 13$

d) $|17-6x| \ge 5$ e) $1 - |2x-7| \le 0$ f) $3 - |2-5x| > 0$

2.52. Rozwiąż nierówność:

a) $0{,}7 \cdot |x-0{,}1| > 0$ b) $3|x+2| + 1\frac{5}{7} < 0$ c) $-2\left|5-\frac{x}{3}\right| + 1\frac{1}{3} > 0$

d) $2 + |-6x+5| > 1$ e) $3 - |-9x+8| \ge 3$ f) $|x-2| \ge 1 + \sqrt{5}$

2.53. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $3 - |x+3| > 0$, zaś zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $|x+4| \ge 1$.

a) Wypisz wszystkie liczby parzyste należące do zbioru A.

b) Podaj przykład liczby wymiernej, która nie należy do zbioru B.

c) Wyznacz zbiory: $A \cap B$ i $B - A$.

2.54. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $4 - 2|x| > 0$, zaś zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $|x+1| - 2 \le 0$.

a) Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B.

b) Wypisz wszystkie liczby naturalne należące do zbioru $A \cup B$.

c) Podaj przykład liczby niewymiernej należącej do zbioru $B - A$.

d) Wyznacz zbiór $A' \cap B'$.

2.55. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie dwie nierówności:

a) $|x-2| < 3$ i $3 - |x| > 0$ b) $|x+1| \ge 4$ i $|x-2| - 4 < 0$

c) $|x-1{,}2| \le 4$ i $-2 + |x| \le 0$ d) $2|x-0{,}4| < 5$ i $|x+0{,}1| - 0{,}4 \le 0$

2.56. Rozwiąż nierówność podwójną:

a) $|x-2| < 3 < |x-1| + 1$ b) $2 - |x+1| \leq 2|1+x| \leq 4$

2.57. Rozwiąż nierówność:

a) $3|x-2| - 5|2-x| \geq 4|-2+x| - 12$

b) $\left|\sqrt{3}-x\right| - 2\left|x-\sqrt{3}\right| < 3\left(\left|-\sqrt{3}+x\right|+1\right)$

c) $-2(|x+5| - 3|-5-x|) - 4|5+x| < |x+5|$

d) $3\left|x+1-\sqrt{2}\right| - 6 > 2\left|\sqrt{2}-1-x\right| + 5$

e) $5\left(\left|x-\sqrt{6}\right| - 2\sqrt{6}\right) - 6\left|\sqrt{6}-x\right| > 0$

f) $-2\left(\left|x-2\sqrt{3}\right| - \sqrt{12}\right) + 3\left|2\sqrt{3}-x\right| \geq \sqrt{108} - 1.$

2.58. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{2\cdot|x-0{,}5|-1}{2} - \frac{|x-0{,}5|+3}{3} > \frac{1}{6}$

b) $1 - \frac{3\cdot|x-1{,}7|-4}{5} \leq \frac{|1{,}7-x|-2}{2} - \frac{|x-1{,}7|+5}{10}$

c) $\frac{4-\frac{2|x+9|+1}{3}}{2} > \frac{\frac{5|-9-x|-4}{2}-3}{3}$

d) $\frac{\frac{8|x-3|-2}{3}-1}{4} - |x-3| > \frac{\frac{|3-x|+6}{4}-9}{3}$

2.59. Rozwiąż nierówność podwójną:

a) $|x-4| + 1 < 10 - 2|4-x| < |x-4| + 7$

b) $2|-x-5| - 4 < 1 - 3|x+5| \leq 1 - 4|5+x|$

c) $-2|x-1| + 1 \leq |x-1| - 5 \leq \frac{|1-x|}{2} - 4$

d) $|-8+x| - 3 < 2|x-8| + 1 < 5(|8-x| - 1).$

Własności wartości bezwzględnej

2.60. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $|x-1| - |1-x|$ b) $2\cdot|2x-6| - 2|3-x|$

c) $2|-2x-3| - 8 - |6+4x|$ d) $\sqrt{x^2} + 3 - |x|$

e) $2\sqrt{(x-3)^2} - |6-2x|$ f) $1 + \sqrt{x^2-2x+1} - |3-3x|$

2.61. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{|x-2|}\cdot|2-x|,\ x \neq 2$ b) $\left|\frac{4x-16}{3}\right|\cdot\left|\frac{6}{4-x}\right|,\ x \neq 4$

c) $\frac{|x^2-9|\cdot|3x-6|}{\sqrt{x^2-4x+4}\cdot|x+3|},\ x \neq 2 \text{ i } x \neq -3$ d) $\frac{\sqrt{9x^2+6x+1}\cdot 5x^2}{|x|^2\cdot|-1-3x|},\ x \neq 0 \text{ i } x \neq -\frac{1}{2}$

e) $\frac{(4x-2)^2}{4\cdot|1-2x|},\ x \neq \frac{1}{2}$ f) $\frac{3\sqrt{x^2+4x+4}}{5(3x+6)^2},\ x \neq -2$

D **2.62.** Udowodnij, że podana liczba jest całkowita.

a) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{13-4\sqrt{3}} - \sqrt{21+12\sqrt{3}}$

D **2.63.** Wykaż, że prawdziwa jest równość:

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{11-4\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}}$

b) $\sqrt{19-8\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{18-8\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

2.64. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci, wiedząc, że $x \in (-\infty, -1)$.

a) $\frac{2\sqrt{-x^3}}{x}$ b) $(2+|x|)\cdot|x|^2 + x^3$ c) $\frac{\sqrt{x^2}(1+|x|)(1+x)}{x^2-1}$

2.65. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sqrt{a^2-4a+4} - \sqrt{a^2+4a+4}$, jeśli $a \in (-\infty, -2)$

b) $\sqrt{9+6b+b^2} - 2\sqrt{9-6b+b^2}$, jeśli $b \in (3, +\infty)$

2.66. Uprość wyrażenie:

a) $\sqrt{4x^2-12x+9}-2\sqrt{x^2}+3|x+2|$, jeśli $x \in (-\infty, -2)$

b) $6|-x|-|-4x-4|-\sqrt{25-10x+x^2}$, jeśli $x \in (0, 5)$

c) $\dfrac{\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{4x^2-12x+9}}{x^2-9}$, jeśli $x \in (6, +\infty)$

d) $\dfrac{|x-3|\cdot\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2-24x+36}}{(x-1)^2-4}$, jeśli $x \in \mathbf{R} - \{-1, 3\}$

2.67. Rozwiąż równanie:

a) $|3x-6| = -14 + 2|5x-10|$
b) $|75x-25| - 42 = |12x-4|$
c) $|-9x-6| + 26 + 2|10+15x| = 0$
d) $8|12+20x| + 16 = 5|-40x-24|$
e) $\sqrt{x^2+10x+25}-|-15-3x|=-8$
f) $|9x-6|-6=2\sqrt{9x^2-12x+4}$

2.68. Rozwiąż równanie:

a) $\sqrt{x^2}=|2x-5|$
b) $|4x-8|=2\cdot|3x-1|$
c) $\sqrt{1+4x+4x^2}=|3-x|$
d) $2|-3-x|=|x-4|$
e) $|4-2x|=\sqrt{x^2-6x+9}$
f) $|2x-7|-\sqrt{4x^2-10x+25}=0$

2.69. Rozwiąż równanie:

a) $|x| + |x|\cdot|x-1| = 0$
b) $|x-3| + |x^2-9| = 0$
c) $|x-1| + |x+2| + |x-5| = 0$
d) $|x+2| = -1|(x-2)(x+2)|$

D **2.70.** Wykaż, że jeśli $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, to $\dfrac{\sqrt{9x^2+18x+9}\cdot\sqrt{x^2-2x+1}}{|1-x^2|}=3$.

D **2.71.** Wykaż, że jeśli $x > 2\frac{1}{2}$, to wartość wyrażenia $\dfrac{\left|\frac{2}{5}x-1\right|+3\sqrt{4x^2-20x+25}}{10-4x}$ jest stała.

D **2.72.** Wykaż, że jeśli a jest liczbą nieujemną, to $\sqrt{9a^2+\sqrt{36a^2+12a+1}}-3a=1$.

D **2.73.** Wykaż, że jeśli $a \in (2, 4)$, to $2\sqrt{\sqrt{16-8a+a^2}+\dfrac{a^2-12}{4}}=a-2$.

D **2.74.** Wykaż, że jeśli $|x-1| \le 5$ i $y \in \langle -5, -1 \rangle$, to $|x+y+2| \le 7$.

D **2.75.** Wykaż, że jeśli $x \in \langle -4, 8 \rangle$ i $|y+5| \le 10$, to $|x-y-7| \le 16$.

D **2.76.** Wykaż, że jeśli a jest liczbą ujemną, to $\dfrac{\sqrt{a^2(a^2-a+0{,}25)}}{a(0{,}5-a)}=-1$.

D **2.77.** Wykaż, że jeśli $x^2+81y^2=45xy$ i $9y<x<0$, to $\dfrac{x-9y}{x+9y}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Równania z wartością bezwzględną

2.78. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $||x|-6| = 8$
b) $||x|-2| = 1$
c) $||x+1|-4| = 3$
d) $||3-x|+1| = 9$
e) $|7-|2x-5|| = 6$
f) $|5-|3x+1||-2 = 0$

2.79. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $||x|-6| = 4$
b) $||x|-1| = 1$
c) $||x-3|+2| = 3$
d) $||x+1|-3| = 5$
e) $3-|4+|x-7|| = 1$
f) $||2x+5|-4| = 3$

2.80. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $|2-x|=x-1$
b) $\sqrt{x^2}=0{,}5x-1$
c) $6+x = 2|x+3|$
d) $|3x-8| + 2 = 2x$
e) $x-1=\sqrt{x^2-2x+1}$
f) $|3-2x|+x=3$

2.81. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $3-|4-x| = 2x$
b) $2|x| + x = 3$
c) $1-x = |x+5|$
d) $|x+2| = x+2$
e) $|x-3|+2x=6$
f) $4-|-2-x|=\dfrac{x+6}{3}$

2.82. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $|x-1|+|x+3|=4$
b) $|x+2|=7-\sqrt{x^2}$
c) $|2x+3|-|x-1|=4$
d) $|x+3|=\sqrt{x^2-2x+1}+8$
e) $|1-x|+|1+x|+2x=0$
f) $|x+2|-|2x-7|=1-x$

2.83. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $|x+1|=2-|x-1|$
b) $6-|4-x|=|2-3x|$
c) $|x+1|+x=6-|3-x|$
d) $3|x|-|x+5|=x$

2.84. Rozwiąż równanie:

a) $|2x-5|=|4-x|$
b) $||x-3|-x|=5$
c) $|3-3x|-|x-1|=4$
d) $|x+2|=2-|x|$
e) $||x+2|-4|=|4-|x||$
f) $x+1-|x-1|=|3-x|$

2.85. Rozwiąż równanie:

a) $|x|+1=|x+1|$
b) $3|x-4|=|2x+5|$
c) $(|x|-1)(|x|+1)=24$
d) $|x+3|+|4x+12|=0$
e) $1-|3x+2|=x$
f) $|1-x|-|x+3|=-x-2$

Nierówności z wartością bezwzględną

2.86. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $||x|-1|\le 2$
b) $||x-1|-3|\ge 4$
c) $||-x-2|-5|>1$
d) $||2-x|-4|<2$
e) $||2x+3|-7|\le 6$
f) $||2-3x|-6|\ge 1$

2.87. Rozwiąż graficznie nierówność:

a) $|2|x-1|-3|\le 5$
b) $||x+3|-2|>2$
c) $|3-|x+5||\le 1$
d) $|2-|x-3||\le 0$
e) $|3-|x-2||>2$
f) $|2|x-1|-4|\ge 4$

2.88. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $|x|+2x>2$
b) $x+4|x+1|>0$
c) $2-|x+5|\ge 0{,}5x$
d) $|-1+2x|<x+2$
e) $|-4-3x|\le 2x-4$
f) $2|-7-x|+1\ge \frac{x}{5}-25$

2.89. Rozwiąż graficznie nierówność:

a) $|x-3|<x+3$
b) $\frac{1}{2}|x|-3\ge x$
c) $|-x-1|+1\ge x$
d) $2|x-4|\ge x-1$
e) $3|x-2|<14-x$
f) $\frac{1}{3}x+4<|x-1|+3$

2.90. Rozwiąż nierówność:

a) $|8-|5x+2||>10$
b) $|-6-3x|<-1{,}5x+1{,}5$
c) $\left|\sqrt{4x^2+20x+25}-6\right|>1$
d) $\left|\sqrt{x^2-4x+4}-3\right|<3$
e) $5-2|x+3|\ge -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$
f) $8-3x<\sqrt{25x^2+40x+16}$

2.91. Rozwiąż nierówność podwójną:

a) $|-2-x|<4<3x-1$
b) $|x-1|\le 1<2x-1$
c) $|2-3x|<1<x+2$
d) $|x+2|>x\ge 2x-1$
e) $1\le ||x-2|-3|\le 5$
f) $x-|2x-8|<2\le |x|$

2.92. Rozwiąż nierówność:

a) $3\sqrt{9x^2-24x+16}-x<|8-6x|$
b) $|-9-3x|\le 2\sqrt{4x^2+24x+36}+3+2x$
c) $|-10x-5|+9>|4x+2|+6x$
d) $-5x-2|5-5x|>|-3x+3|-16\left|\frac{x-1}{2}\right|$

2.93. Rozwiąż nierówność:

a) $|2x-3|>16+|x+1|$
b) $|x+4|+|6-2x|<5x$
c) $2|x-2|-|x|>1$
d) $|x+3|-|2-x|>2x-1$
e) $\frac{|-2x-4|}{2}-|3-x|>x+1$
f) $3|x-1|-2|x+5|<x+2$

2.94. Rozwiąż nierówność:

a) $|x+3|>5-|x|$
b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}\leq 6$
c) $|-x-3|+|3-x|+4>0$
d) $|x-1|+\sqrt{4x^2-20x+25}\leq 9$
e) $|x+5|-7\leq x-|x-1|$
f) $3|x-3|-4\leq x-|5+x|$

Równanie liniowe z parametrem

2.95. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie z niewiadomą x ma jedno rozwiązanie. Wyznacz to rozwiązanie.

a) $(m+1)x=1$
b) $mx=4x+m$
c) $(m^2+1)x=x$
d) $x\sqrt{m}=2$
e) $(m^2-9)x=m-3$
f) $mx+4=m^2-2x$

2.96. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie z niewiadomą x jest tożsamościowe.

a) $ax-a=2-2x$
b) $(a^2-25)x=3a+15$
c) $ax=a^3x$
d) $(a^2+16)x=a+4$
e) $ax-a^2+9=3x$
f) $a^2x-6ax-2a^2+12a=0$

2.97. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których dane równanie z niewiadomą x jest sprzeczne.

a) $k(x+1)=2$
b) $kx-3=2x-k$
c) $k^2x+k=0$
d) $k^2x=kx$
e) $|k|x=4x+k$
f) $x-|k|x=1+k$

2.98. Wyznacz wartość parametru m, dla którego równanie z niewiadomą x ma co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $mx+m=m^2x+1$
b) $x=m^2x$
c) $(|m|-3)x=m+3$
d) $2x=|m|(x+1)$
e) $mx-m^2=4m+4-2x$
f) $\frac{mx}{m+1}=m+1$

2.99. Dane jest równanie z niewiadomą x. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru. Gdy istnieje jedno rozwiązanie – wyznacz je.

a) $(2-|m|)x=m+2$
b) $ax-8x=a$
c) $k(k-1)x=k$
d) $b^2x=3x$
e) $ax-a^2=2x+4$
f) $b^2x+6=b+36x$

2.100. Dane jest równanie z niewiadomą x. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru. Gdy istnieje jedno rozwiązanie – wyznacz je.

a) $m^2x=16x+m^2$
b) $(p-1)x=(1-p)^2$
c) $(p+1)x-p(p+2)=1$
d) $4m^2x=m+x+0{,}5$
e) $k^2x-k^2=9x-3k$
f) $m^2(x-1)=x+m-2$

2.101. Dane jest równanie z niewiadomą x. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru m. Gdy istnieje jedno rozwiązanie – wyznacz je.

a) $x+3-m=|m-2|\cdot x$
b) $|-1-m|\cdot x-5m=1-2x$
c) $|3m-2|\cdot x+4=m^2+1$
d) $|m-2|\cdot x=1+mx$
e) $2+m(1-x)=2|m+3|\cdot x$
f) $||m-2|-5|\cdot x+16=m(m-6)+x$

2.102. Dane jest równanie z niewiadomą x. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametrów.

a) $ax=2b$
b) $(1-m)x=k$
c) $(2c+d)x=0$
d) $(5-p)x=k+1$
e) $bx=cx+b$
f) $bx=a(b-x)$

Nierówność liniowa z parametrem

2.103. Dana jest nierówność: $3-4(x+k)>kx$, gdzie x jest niewiadomą, k – parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

a) $k=-1$
b) $k=-4$
c) $k=7$.

2.104. Dana jest nierówność $(b^2+4b)x>b-4x$, gdzie x jest niewiadomą, b – parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

a) $b=2$
b) $b=-2$
c) $b=0$.

2.105. Dana jest nierówność $a^2x-1\leq x+a$, gdzie x jest niewiadomą, a – parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

a) $a=2$
b) $a=-1$
c) $a=1$.

2.106. Dana jest nierówność $6 + m^2x < 9x - 2m$, gdzie x jest niewiadomą, m – parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

a) $m = 2$ b) $m = 3$ c) $m = -3$.

2.107. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których:

a) zbiór rozwiązań nierówności $5x - m + 8 < 0$ jest przedziałem $(-\infty, 4)$

b) zbiór rozwiązań nierówności $-2x + 5m - 4 < 0$ jest przedziałem $(3, +\infty)$

c) zbiór rozwiązań nierówności $3m - x \leq 2x - 9$ jest przedziałem $\langle -4, +\infty)$

d) zbiór rozwiązań nierówności $7x - 2(m - 1) \geq x + 11$ jest przedziałem $\langle 2, +\infty)$.

2.108. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których zbiór rozwiązań danej nierówności jest przedziałem $\langle 0, +\infty)$.

a) $(p + 1)x - |p + 1| + 4 \geq 0$ b) $(p - 2)x + 4p^2 - 20 \leq 0$

2.109. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których zbiór rozwiązań danej nierówności jest przedziałem $(-\infty, 0\rangle$.

a) $-px + 3p^2 - 27 \leq 0$ b) $(2 + p)x - |p + 3| + 8 \geq 0$

2.110. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności:

a) $3x + m - 1 < 0$ zawiera się w przedziale $(-\infty, 1)$

b) $4m - x \leq x + 3$ zawiera się w przedziale $\langle 1, +\infty)$

c) $2x - 3m \geq 5$ zawiera się w przedziale $(-5, +\infty)$

d) $3(x - m) \geq 4x - m + 7$ zawiera się w przedziale $(-\infty, 2)$.

2.111. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności:

a) $2k - x + 1 > x + 5$ jest przedziałem $(-\infty, 10 - 3k)$

b) $\frac{x-2k}{5} \geq \frac{k+2-x}{4}$ jest przedziałem $\langle 5k - 6, +\infty)$

c) $\frac{3x-5k}{2} < \frac{2k-1+x}{3}$ zawiera się w przedziale $(-\infty, 5k + 2)$

d) $\frac{x-k}{2} - \frac{2x+3k}{3} \geq \frac{1}{6}$ zawiera się w przedziale $(-\infty, 5 - 6k\rangle$.

2.112. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \mathbf{R}$, dla których zbiorem rozwiązań nierówności:

a) $(m^2 - 1)x + m \geq 0$ jest zbiór $\mathbf{R}$

b) $(5 - |m|)x + 2m \leq 0$ jest zbiór $\mathbf{R}$

c) $(|m - 3| - 2)x - m > 0$ jest zbiór pusty

d) $(9m^2 - 36)x + m^2 - 4m + 4 \leq 0$ jest zbiór pusty.

2.113. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których dziedziną funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{-x+m}$ jest przedział $(-\infty, 2\rangle$

b) $f(x) = \sqrt{2x-3m}$ jest przedział $\langle 6, +\infty)$

c) $f(x) = \sqrt{(|m|-1)x+3}$ jest zbiór $\mathbf{R}$

d) $f(x) = \sqrt{(m^2-16)x-m}$ jest zbiór $\mathbf{R}$

e) $f(x) = \sqrt{m^2x-8m}$ jest przedział $\langle 4, +\infty)$

f) $f(x) = \sqrt{6-2m+(|5-m|+3)x}$ jest przedział $\langle -1, +\infty)$.

Równania liniowe z wartością bezwzględną i z parametrem

2.114. Dane jest równanie $2(|x| + 2) = 3m(3m + |x|)$, gdzie m jest parametrem, $m \in \mathbf{R}$. Rozwiąż to równanie, jeśli:

a) $m = -1$ b) $m = \frac{2}{3}$ c) $m = 0$ d) $m = 1$.

2.115. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których równanie:

a) $|x| = 4 + 4k$ ma dwa rozwiązania

b) $|-x + 1| = 6 - 3k$ jest sprzeczne

c) $|x + 5| = k^2 - 4|x + 5|$ ma dwa rozwiązania

d) $3(|x - 6| - 3k^2) = 6k + 1$ ma jedno rozwiązanie

e) $k \cdot |3x - 5| = k^2 - 4k$ jest sprzeczne

f) $(25k^2 - 4)|3 - 2x| - 5k + 2 = 0$ jest tożsamościowe.

2.116. Ustal liczbę rozwiązań danego równania z niewiadomą x ze względu na wartość parametru p, $p \in \mathbf{R}$:

a) $p \cdot |x + 1| = p^2$ b) $|3x - 7| = 6 - 3p$

c) $p^2 + 4|-3 + x| = 0$ d) $(|p| - 3) \cdot |x| = 0$

e) $|px| - |x| = 2$ f) $|p + 2| \cdot |x - 3| = |12 - 4x| + 5$.

2.117. Dane jest równanie z niewiadomą x. Przeprowadź dyskusję liczby jego rozwiązań w zależności od wartości parametru p, $p \in R$. Następnie podaj wzór funkcji f, która każdej liczbie rzeczywistej p przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

a) $||x+2|-3|-4=p$ b) $||x-3|-4|+1=\frac{1-2p}{3}$

2.118. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in R$, dla których równanie $|9x-27|+a^2=a\cdot|3-x|+81$ ma dwa rozwiązania. Wyznacz te rozwiązania.

2.119. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in R$, dla których równanie $4(|x-2|-4)=k^2+8k-k|x-2|$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

2.120. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in R$, dla których równanie $m(|x-3|-(2-m))=0$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

2.121. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in R$, dla których równanie:
a) $|x-2|=p-5$ ma dwa rozwiązania dodatnie,
b) $|x+7|=2+5p$ ma dwa rozwiązania ujemne.

2.122. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in R$, dla których równanie:
a) $|5-2x|=\frac{3p-2}{2}$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków,
b) $|2+3x|-\frac{4p-5}{2}=|6x+4|$ ma dwa rozwiązania ujemne.

2.123. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in R$, dla których równanie:
a) $|3+x|=2k-3$ ma tylko rozwiązania ujemne,
b) $|0{,}5x-1|=\frac{5-k}{3}$ ma tylko rozwiązania nieujemne.

2.124. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in R$, dla których równanie $|3-|x-2||=m+7$ ma więcej rozwiązań dodatnich niż ujemnych.

2.125. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in R$, dla których równanie:
a) $x-2|x+2|=\frac{3-2k}{2}$ ma tylko rozwiązania niedodatnie,
b) $3|x-2|-2x=8k-4$ ma tylko rozwiązania dodatnie.

2.126. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in R$, dla których równanie:
a) $2x-|x+3|=\frac{2p+11}{3}$ ma jedno rozwiązanie dodatnie,
b) $|2x-3|-x=\frac{3p-8}{2}$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

2.127. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań równania z niewiadomą x, w zależności od wartości parametru p, jeśli:

a) $|x-2|+|x|=p$ b) $3|x|-|2x+6|=2p-4$

c) $|2|x+1|-|2-x||=5-p$ d) $||x|-|x+3||=\frac{4p+2}{5}$

2.128. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in R$, dla których równanie $||x-1|-3|x+2||=3a-4$ ma więcej rozwiązań ujemnych niż dodatnich.

2.129. Napisz wzór funkcji g, która każdej wartości parametru k, $k \in R$, przyporządkowuje liczbę rozwiązań danego równania. Następnie naszkicuj wykres tej funkcji.
a) $|x+4|-2|1-x|=|k|-3$
b) $|3-|x-1||=k-1$
c) $|||x|-6|-2|=\frac{2k-4}{3}$
d) $|3-|x-4|-|x+1|+x|=|k-1|-2$

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

2.130. Oblicz wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0{,}5 & 9 \\ -2 & 16 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sqrt{27} & \sqrt{8} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$.

2.131. Rozwiąż dany układ równań, stosując wyznaczniki.

a) $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 5x-7y=-6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-5y=4 \\ 11x-12y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x=13+7y \\ 2=8y-5x \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{3}x+2y=5 \\ 4x=4+3\sqrt{3}y \end{cases}$

2.132. Rozwiąż dany układ równań, stosując wyznaczniki.

a) $\begin{cases} 3x - \frac{y}{23} = 1 \\ 23x - 2y - 21 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}4x + \frac{3}{7}y = 5 \\ 5y = 7x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \sqrt{6} \\ \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 3 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{2}x + \left(\sqrt{2}+1\right)y = 2 \\ \left(\sqrt{2}-1\right)x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$

2.133. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań z parametrem a, gdzie $a \in \mathbf{R}$. W przypadku istnienia rozwiązań, wyznacz je.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + ay = 2a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - ay = a \\ ax - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + 2y = -1 \\ 8x + ay = a + 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (a-1)x - 2y = 3 \\ 4x - (a+1)y = a \end{cases}$

2.134. Przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań z parametrem a, gdzie $a \in \mathbf{R}$. W przypadku istnienia rozwiązań, wyznacz je.

a) $\begin{cases} (a-3)x + ay = 3 \\ ax + (a+2)y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + 3ay = 3 \\ x + ay = a - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + ay = 3 \\ ax + 4y = 2a \end{cases}$ d) $\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = a^2 + 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = a^2 - 1 \end{cases}$

2.135. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x + 7y = 2k - 7 \\ 2x + 5y = k + 2 \end{cases}$ jest para liczb (x, y), spełniająca nierówność $-5 \leq x + y < 7$.

2.136. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -2x + 3y = 4k - 5 \\ 3x - 5y = 9 - 6k \end{cases}$ jest para liczb (x, y) taka, że $|xy| \geq 10$.

2.137. Dla jakich wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, wykresy funkcji liniowych $y = \frac{1}{2}x - \frac{a}{4}$ oraz $y = \frac{3}{4}x - \frac{a+2}{3}$ przecinają się w punkcie, który należy do I ćwiartki układu współrzędnych i nie należy do żadnej osi tego układu?

2.138. Dla jakich wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, wykresy funkcji liniowych $f(x) = -0{,}5x - \frac{a+2}{4}$ oraz $g(x) = 1{,}5x + \frac{2a-1}{2}$ przecinają się w punkcie, który należy do wykresu funkcji $h(x) = 0{,}5x + 4$?

2.139. Wykresy funkcji liniowych $f(x) = -0{,}4x + p - 9$ oraz $g(x) = 2x - p - 5$ przecinają się w punkcie, który należy do wykresu funkcji $h(x) = 1 - 2|x - 3|$.

a) Oblicz p.

b) Dla dodatniej wartości parametru p, wyznaczonej w punkcie a), narysuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji f, g, h i podaj współrzędne ich wspólnego punktu.

2.140. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których wykresy funkcji liniowych $f(x) = 1{,}25x - \frac{3k-2}{4}$ oraz $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5-4k}{3}$ przecinają się w punkcie, którego współrzędne (x, y) spełniają warunek $4x^2 - y^2 \leq 15$.

2.141. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} (a-2)x + y = 4 \\ -x + ay = 2 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) taka, że $|x| = |y|$.

2.142. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których wykresy funkcji liniowych $f(x) = 2x - m + 8$ oraz $g(x) = -4x + 5m - 4$ przecinają się w punkcie, którego współrzędne (x, y) spełniają warunek $|y| - |x| \geq 5$.

2.143. Dla jakich wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, wykresy funkcji liniowych $f(x) = -5x + 2p + 3$ oraz $g(x) = 3x - 6p - 21$ przecinają się w punkcie, którego współrzędne (x, y) spełniają nierówność $|x - 4| - |6 - y| \leq 1$?

2.144. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - 3y = 3 - |4 - k| \\ -3x + 5y = |3k - 12| - 5 \end{cases}$ jest para liczb o przeciwnych znakach.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Wartość wyrażenia $\frac{|\sqrt{3}-2|\cdot|-2-\sqrt{3}|}{2}$ jest równa:

A. $-0{,}5$ B. $\frac{7-4\sqrt{3}}{2}$ C. $2\sqrt{3}+\frac{7}{2}$ D. $0{,}5$

2. Jeśli $x \in (-6, 2)$, to wyrażenie $|2x-4|-3|x+6|$ można zapisać w postaci:

A. $x-14$ B. $-x+10$ C. $-5x-14$ D. $-5x-2$

3. Wiadomo, że $a < 0$ i $b > 0$. Wobec tego wyrażenie $|b-3a|\cdot|a-3b|$ jest równe:

A. $3a^2-10ab+3b^2$ B. $3(a^2+b^2)$ C. $-10ab$ D. $10ab-3(a^2+b^2)$

4. Liczbą równoodległą od liczb $\sqrt[3]{27}-3\sqrt{2}$ i $\sqrt{50}-7$ na osi liczbowej jest liczba:

A. $2(\sqrt{2}-1)$ B. $5-4\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}-4$ D. $\sqrt{2}-2$

5. Odległość między liczbami $\sqrt{5}+2$ i $\sqrt{5}-17$ na osi liczbowej jest równa:

A. 4 B. 19 C. $2+\sqrt{5}$ D. 18

6. Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|4-5x|-2x=|x|$.

A. 1 B. 0 C. -1 D. 2

7. Wskaż równanie sprzeczne.

A. $|-3-x|=0$ B. $|x+3|+1=0$ C. $|7-x|=1$ D. $|-2-x|=4$

8. Wskaż równanie, którego rozwiązaniami są liczby 8 i -12:

A. $|-x-2|=10$ B. $|x+2|=6$ C. $|x-2|=10$ D. $|2-x|=6$

9. Zbiór $(-\infty, -15) \cup (21, +\infty)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:

A. $|x+3|>18$ B. $|2x-6|>15$ C. $|x-6|>15$ D. $|x-3|>18$

10. Najmniejszą liczbą pierwszą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $|2-x| \le 1$ jest liczba:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. Oblicz wartość wyrażenia dla podanej obok wartości zmiennej:

a) $\left|2-a|a-4|\right|+1\frac{7}{9}$ $a=0{,}3^{-1}$

b) $15+|5-b|\cdot|10-b|-|2b-6|\cdot|30-b|$ $b=\sqrt{33^2+44^2}$

D **12.** Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{|\sqrt{48}-3\sqrt{3}|\cdot|1-\sqrt{3}|}{|\sqrt{5}-2|\cdot|-2-\sqrt{5}|}-|\sqrt{3}-2|$.

13. Wykaż, że:

a) $|3\sqrt{5}-5\sqrt{2}|\cdot|5\sqrt{2}-3\sqrt{5}|+|35+30\sqrt{10}|=130$

b) $\left|0{,}75\cdot\log_3 81+\log_{\frac{1}{2}}128\right|-\log_5\left|2{,}8-27\frac{4}{5}\right|=2$

14. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie:

a) $8-|3-x|-|-2x-4|$, jeśli $x \in \langle -2, 3)$

b) $|3a-1|\cdot|1-3b|-9|ab|-1$, jeśli $a<0$ i $b<0$

15. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $|x-4|=5$ b) $|2-x|+1=0$ c) $|-x-3|=0$

16. Korzystając z odległości na osi liczbowej rozwiąż równanie:

a) $2|x+7|=6$ b) $|-x-4|=9$

17. Korzystając z odległości na osi liczbowej rozwiąż nierówność:

a) $|x-3| \ge 8$ b) $1-|x+13|>-4$

18. Rozwiąż graficznie:

a) równanie $2|x+5|=6$ b) nierówność $|x+2| \le 5$

19. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $|2-x|>1$ b) $|x+5| \le 0$

c) $|-x-1|>0$ d) $|-x-7| \ge -7$

20. Rozwiąż nierówność podwójną:

a) $\frac{3x-14}{4} \le 1 \le |x-3|$ b) $1 < |4+x| \le 6$

21. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ oraz $B - A$ wiedząc, że:
A – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $8 - |x+2| > 3$
B – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x-1| - 2 \ge 0$

D **22.** Wykaż, że jeśli x jest liczbą rzeczywistą ujemną, zaś y jest liczbą rzeczywistą dodatnią, to $|4x-3| \cdot (y-x) - 3|x-y| + y^2 = (2x-y)^2$.

D **23.** Wykaż, że jeśli x i y są liczbami rzeczywistymi ujemnymi, to

$$\frac{9|x^2-y| - (3x-2y)^2 + 4|y|^2}{3} = |3y| + 4|xy|$$

24. Rozwiąż:

a) równanie $\frac{|x-7|}{9} = \frac{|7-x|}{3}$

b) nierówność $8 - 6|-x-1| - |x+1| \ge 4 - 5|1+x|$

25. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{|3-x|}{2} - \frac{5|x-3|}{4} = 1$ b) $\frac{4|-x+1|}{3} - \frac{3|1-x|}{2} = \frac{5|x-1| - 6\sqrt{3}}{6}$

26. Rozwiąż nierówność:

a) $6 - 5|\sqrt{8} - x| + 2|x - 2\sqrt{2}| < -9\sqrt{2}$

b) $\frac{3-2|-2-x|}{5} - \frac{1+|x+2|}{2} < 0,3 - \frac{3|-x-2|+1}{5}$

27. Wyznacz liczbę p, dla której jednym z rozwiązań równania $|p-2+x| = 6$ z niewiadomą x jest liczba 7. Dla wyznaczonej liczby p wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania.

28. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $|2x-3| - |4x+8| = 0$ b) $|1 - |3x+2|| = 7$

c) $2x - |x+1| = 5$ d) $|2-x| = 5 - |x+3|$

29. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $||x-3| - 1| \ge 9$ b) $|7-x| + |x-1| \le x + 14$

30. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $|3 - 2|x-1|| = 3$ b) $\frac{2x+10}{3} = |-4 + 2|x+3||$

31. Rozwiąż graficznie nierówność:

a) $|2 - |x-3|| \ge 1$ b) $|4-3x| < x + 4$

D **32.** Wykaż, że jeśli $y > 2x \ge 0$, to $\sqrt{4x^2+y^2+4xy} + 8x - \sqrt{4x^2+y^2-4xy} = 12x$.

33. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań równania ze względu na wartość parametru k, $k \in \mathbf{R}$.

a) $(3k+2)x = 4 - 9k^2$ b) $2(2x+3) = k^2(x-1) - 5k$

34. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których zbiór rozwiązań nierówności:

a) $\frac{3-2x}{5} \le 2p - 1$ jest przedziałem $\langle -3, +\infty)$

b) $\frac{5x-3p}{2} < \frac{2-7p}{3}$ zawiera się w przedziale $\left(-\infty, \frac{2-3p}{15}\right\rangle$

35. Wyznacz wartość parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla której zbiorem rozwiązań nierówności $(3 - |m+2|)x + 2 - 3m > 0$ jest:

a) zbiór liczb rzeczywistych b) zbiór pusty.

36. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie:

a) $(m+1) \cdot |5-4x| = m^2 - 1$ ma dwa rozwiązania dodatnie

b) $|2x+4| - x = 3m + 1$ ma dwa rozwiązania o różnych znakach

c) $|x+1| - |x-3| = 2m + 6$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

37. Naszkicuj wykres funkcji $y = g(k)$, która każdej wartości parametru k przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $|2|x-1| - |x+2|| = 5 - k$.

38. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań układu równań $\begin{cases} 2x + 3ay = 4 \\ 2y = 4 - 3ax \end{cases}$ ze względu na wartość parametru a, $a \in \mathbf{R}$. W przypadku istnienia rozwiązania wyznacz je.

39. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których wykresy funkcji liniowych $f(x) = 2x + 2 - k$ oraz $g(x) = -x + 2k + 2$ przecinają się w punkcie, którego współrzędne (x, y) spełniają warunek $x - y < 2k + 8$.

3. Funkcja kwadratowa

Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z klasy 1.

3.1. Zapisz podany wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Następnie wypisz współczynniki a, b, c.

a) $f(x) = (x-1)(2x+3) - 4x$
b) $f(x) = 5 - 2(x+4)^2$
c) $f(x) = -3[(x-2)(2x+3)+6]$
d) $f(x) = (1-2x)^2 + 4(x-1) + 3$

3.2. Napisz wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2$ wiedząc, że do jej wykresu należy punkt:

a) $A(3\sqrt{2}, 12)$
b) $B(2, -4)$
c) $C(-2, 8\sqrt{5})$.

3.3. Wyznacz współczynniki b, c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ wiedząc, że do wykresu funkcji f należą punkty:

a) $A(4, 9)$, $B(-3, -12)$
b) $A(-1, 6)$, $B(4, -4)$.

3.4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, jeśli do wykresu tej funkcji należą punkty:

a) $A(-2, 9)$, $B(0, 4)$, $C(4, 6)$
b) $A(1, 6)$, $B(-2, -3)$, $C(0, 9)$.

3.5. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, której wykres otrzymamy przesuwając równolegle wykres funkcji:

a) $y = \frac{1}{3}x^2$ o 5 jednostek w lewo wzdłuż osi OX,
b) $y = -2x^2$ o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi OX,
c) $y = \frac{2}{5}x^2$ o 4 jednostki w górę wzdłuż osi OY,
d) $y = -x^2$ o 2 jednostki w dół wzdłuż osi OY.

3.6. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że jej wykres otrzymamy przesuwając równolegle wykres funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$:

a) o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX i o 3 jednostki w dół wzdłuż osi OY,
b) o 1 jednostkę w lewo wzdłuż osi OX i o 5 jednostek w dół wzdłuż osi OY,
c) o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX i o 4 jednostki w górę wzdłuż osi OY,
d) o 5 jednostek w prawo wzdłuż osi OX i o 2 jednostki w górę wzdłuż osi OY.

3.7. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne punktu wspólnego paraboli i osi OY. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = -(x+3)^2$
b) $f(x) = 2(x-1)^2 + 1$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$
d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$
e) $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$
f) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$

3.8. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Podaj zbiór wartości funkcji f, maksymalne przedziały monotoniczności tej funkcji i równanie osi symetrii jej wykresu.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$
b) $f(x) = x^2 - 5$
c) $f(x) = \frac{2}{3}(x+4)^2$
d) $f(x) = -2(x-1)^2 + 7$
e) $f(x) = \frac{1}{4}(x+5)^2 - 3$
f) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2 - 4$

3.9. Dany jest wierzchołek W paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej f oraz punkt A należący do tej paraboli. Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej, a następnie doprowadź go do postaci ogólnej.

a) $W(2, 0)$, $A(5, -3)$
b) $W(3, 1)$, $A(1, 2)$
c) $W(-1, 3)$, $A(0, 1)$
d) $W\left(2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{8}\right)$, $A(5, 0)$
e) $W(-1, -1)$, $A(2, -4)$
f) $W(-4, 0)$, $A\left(-7, 1\frac{4}{5}\right)$

3.10. Wykres funkcji kwadratowej f jest symetryczny względem prostej $x + 3 = 0$ i przecina oś OY w punkcie o rzędnej 10. Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 10.

3.11. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej wiedząc, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty, 4\rangle$ oraz dla argumentów -2 i 8 funkcja przyjmuje tę samą wartość, równą -1.

3.12. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej wiedząc, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1, +\infty)$ i malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$, zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle -2, +\infty)$, a jej wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych.

3.13. Funkcja kwadratowa f dla argumentu -3 przyjmuje najmniejszą wartość, równą 5. Wiedząc, że do wykresu tej funkcji należy punkt $A(-2, 10)$, wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

3.14. Funkcja kwadratowa f dla argumentu 2 przyjmuje największą wartość, równą 4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej wiedząc, że jej wykres przecina oś OY w punkcie o rzędnej 1.

D **3.15.** Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k:

a) różnica $f(k) - f(k-1)$ jest liczbą całkowitą nieparzystą

b) różnica $f(k+3) - f(k+1)$ jest liczbą podzielną przez 4.

3.16. Wyznacz równanie prostej, do której należą wierzchołki parabol, będących wykresami funkcji kwadratowych, opisanych wzorem:

a) $f(x) = (x-3)^2 + m$, $m \in \mathbf{R}$ b) $f(x) = 5(x-m)^2 + m$, $m \in \mathbf{R}$

c) $f(x) = -2(x-m)^2 - 4$, $m \in \mathbf{R}$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+m)^2 + 2m$, $m \in \mathbf{R}$.

Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

3.17. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Sprowadź ten wzór do postaci ogólnej.

a) $f(x) = 4(x-3)^2 - 20$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 6$ c) $f(x) = -5(x-1)^2 + 1$

3.18. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej. Sprowadź ten wzór do postaci kanonicznej, stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$ c) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

d) $f(x) = 3x^2 - 24x + 50$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2$

3.19. Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej f, jeśli:

a) $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$ b) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 7x$ c) $f(x) = (1-4x)(1+4x)$

d) $f(x) = 3(x-1)x + 1$ e) $f(x) = (3x-2)^2$ f) $f(x) = \frac{x^2 - 6(x-4)}{2}$

3.20. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f, stosując poznane wzory. Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$ b) $f(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e) $f(x) = 4x^2 - x + 1$ f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

3.21. Prosta k jest osią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej f. Oblicz współczynnik b we wzorze tej funkcji.

a) $f(x) = 4x^2 - bx + 2$, $k\colon x = 0$ b) $f(x) = -x^2 + bx + 12$, $k\colon x = 5$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx - 1$, $k\colon x = -3$ d) $f(x) = -5x^2 + bx - 4$, $k\colon x = -\frac{1}{2}$

3.22. Dany jest wyróżnik funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ i wierzchołek W paraboli, będącej wykresem tej funkcji. Wyznacz współczynniki a, b, c.

a) $\Delta = 12$, $W(4, 3)$ b) $\Delta = -8$, $W\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ c) $\Delta = 120$, $W(0, -5)$

d) $\Delta = 36$, $W(-1, 3)$ e) $\Delta = -48$, $W(2, -3)$ f) $\Delta = -1$, $W\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{20}\right)$

3.23. Oblicz współczynnik a we wzorze funkcji kwadratowej f oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.

a) $f(x) = a(x+2)^2 - 7$, $\Delta = -84$ b) $f(x) = ax^2 - \sqrt{3}$, $\Delta = 24$

c) $f(x) = a(x-3)^2 + 5$, $\Delta = -10$ d) $f(x) = a(4-x)^2 - 2$, $\Delta = -8$

e) $f(x) = a(-5-x)^2 - 1$, $\Delta = \frac{4}{5}$ f) $f(x) = a(-x-1)^2 - 8$, $\Delta = 128$

3.24. Doprowadź wzór funkcji kwadratowej f do postaci kanonicznej. Podaj współrzędne punktu przecięcia paraboli będącej wykresem funkcji f z osią OY i współrzędne punktu A, symetrycznego do niego względem osi symetrii tej paraboli. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 7$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 6$

e) $f(x) = -2x^2 - 6x$

f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$

3.25. Wyznacz zbiór wartości funkcji kwadratowej f nie szkicując jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 50$

b) $f(x) = -8x^2 + 7$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$

3.26. Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji kwadratowej f nie szkicując jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x - 4$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25$

c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x$

d) $f(x) = -\frac{4}{5}x^2 - 12x + 19$

3.27. Ile jest takich funkcji kwadratowych, których zbiorem wartości jest przedział $\langle -4, +\infty)$, wyróżnik jest równy 16, a wykres przecina oś OY w punkcie $A(0, 5)$?

a) Podaj wzory tych funkcji w postaci kanonicznej.

b) Naszkicuj wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.

c) Podaj równanie prostej względem której wykresy tych funkcji są symetryczne.

Miejsce zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

3.28. Dany jest wzór funkcji kwadratowej $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$. Podaj, na podstawie wartości a i q, liczbę miejsc zerowych tej funkcji.

a) $y = 3(x - 1)^2 + 4$

b) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 5$

c) $y = (x + 8)^2 - 2$

d) $y = \frac{1}{4}(x - 4)^2 + 1$

e) $y = -(x + 5)^2$

f) $y = -2(x + 1)^2 - 6$

3.29. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

b) $f(x) = 2(x - 3)^2$

c) $f(x) = 9x^2 - 81$

d) $f(x) = (x + 2)^2 - 36$

e) $f(x) = (x - 1)^2 + 5$

f) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$

3.30. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)^2 - 8$

b) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$

c) $f(x) = 3(x - 7)^2 - 27$

d) $f(x) = 100x^2 - 25$

e) $f(x) = (x + 4)^2$

f) $f(x) = -2 - 2x^2$

3.31. Podaj miejsca zerowe funkcji:

a) $y = (x + 2)(x - 7)$

b) $y = 3(2x - 8)x$

c) $y = -4(x + 5)^2$

d) $y = (x - 8)(x\sqrt{3} + \sqrt{6})$

e) $y = (2 - 2x)(x - 3)$

f) $y = 3(4 - x + \sqrt{2})^2$

3.32. Dany jest wzór funkcji kwadratowej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a) $y = 4x^2 - 8x$

b) $y = 20 - 4x^2$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 12x$

d) $y = x^2 + 10x + 25$

e) $y = \frac{4}{5}x^2 + 5$

f) $y = -x^2 + 2x - 1$

3.33. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f, o ile istnieją, jeśli:

a) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

c) $f(x) = (5x - 4)^2$

d) $f(x) = -(x + 1)^2 - 9$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8x + 32$

f) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$

3.34. Oceń na podstawie wartości wyróżnika, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa:

a) $y = -3x^2 + 9x + 1$

b) $y = -2x^2 - 6x - 7$

c) $y = 9x^2 + 12x + 4$

d) $y = 2\sqrt{2}x^2 - 4x + \sqrt{2}$

e) $y = -2x^2 - \sqrt{3}x - 1$

f) $y = 9x^2 + x - 16$

3.35. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej. Oblicz wyróżnik i wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a) $y = -2x^2 - 8x + 10$ b) $y = 3x^2 + 2x - 1$ c) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 8$

d) $y = x^2 + 2x + 6$ e) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 4$ f) $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$

3.36. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej. Oblicz wyróżnik i wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ b) $f(x) = 2x - 3x^2$ c) $f(x) = -4x^2 - 1$
d) $f(x) = 3x^2 + 7x + 4$ e) $f(x) = 0{,}5x^2 - 6x + 8$ f) $f(x) = 2x^2 - 10x + 3$

3.37. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej. Podaj wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)(x+10)$ b) $f(x) = 8x(x - 12)$

c) $f(x) = \frac{3}{5}(x+5)^2$ d) $f(x) = -5(x + 3)(x - 8)$

e) $f(x) = -2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ f) $f(x) = -(x - 4)(x - 4)$

3.38. Dany jest współczynnik a i miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

a) $a = \sqrt{2}$ $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{1}{2}$ b) $a = -3$ $x_1 = -2$, $x_2 = 0$

c) $a = \frac{1}{3}$ $x_0 = 7$ d) $a = -\frac{1}{3}$ $x_1 = 4$, $x_2 = 8$

e) $a = 7$ $x_0 = -2$ f) $a = \frac{2}{3}$ $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

3.39. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej, o ile istnieje.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$ b) $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 1{,}6x$

c) $f(x) = -2x^2 + 3x - 7$ d) $f(x) = -4x^2 + 40x - 36$

e) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 2$ f) $f(x) = \frac{5}{7}x^2 - 2\frac{6}{7}x - 15$

3.40. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

a) $f(x) = -5(x - 6)(x + 4)$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-8)(x+8)$

c) $f(x) = 4x(x + 10)$ d) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-9)(x-3)$

3.41. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej. Podaj wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a) $f(x) = (x - 1)(x + 5)$ b) $f(x) = 2\sqrt{3}x(x+4)$

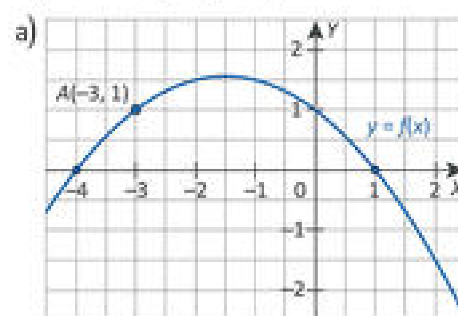
c) $f(x) = 2(x-\sqrt{6})^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+6)(x-6)$

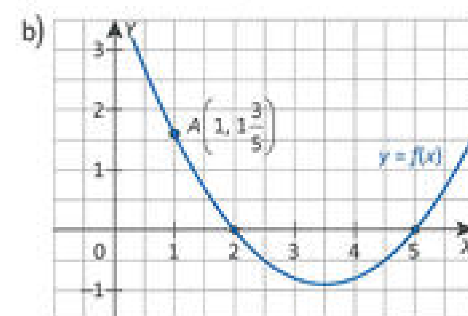
e) $f(x) = \frac{3}{5}(x-1)(x+5)$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}(x-3)(x-4)$

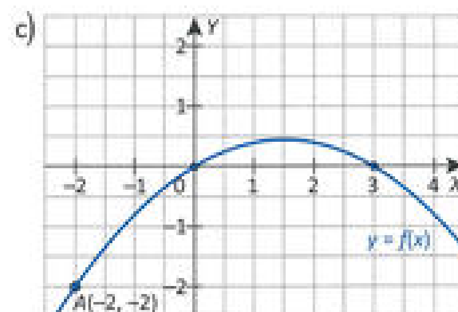
3.42. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Sprowadź wzór tej funkcji do postaci iloczynowej, o ile istnieje.

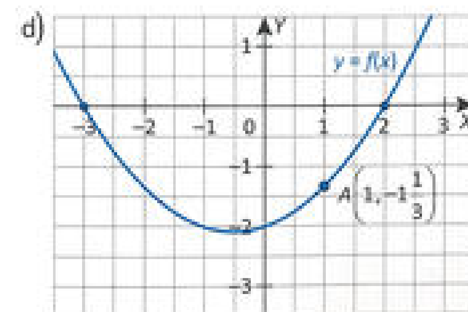
a) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ b) $f(x) = -1(x + 3)^2 + 9$ c) $f(x) = 4(x - 5)^2 - 16$
d) $f(x) = -9(x + 2)^2 + 36$ e) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+7)^2 - 1$

3.43. Na podstawie danych punktów wyróżnionych na wykresie funkcji kwadratowej f, wyznacz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej. Następnie podaj jej wzór w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej.

a)


b)


c)


d)


D 3.44. Wykaż, że dla dowolnej liczby a różnej od 0 i dowolnej liczby rzeczywistej c funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + (a + c)x + c$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

D 3.45. Wykaż, że jeśli suma wszystkich współczynników we wzorze funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest równa zeru, to funkcja ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

D 3.46. Wykaż, że jeśli $a \in R - \{1\}$, to funkcja kwadratowa $f(x) = (a-1)x^2 + 2ax + a + 1$ ma dwa miejsca zerowe, z których jedno jest równe -1.

3.47. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = mx^2 + (2m + 1)x + m + 3$, $m \in R - \{0\}$.

a) Dla $m = -1$ zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

b) Dla $m = \frac{1}{8}$ zapisz wzór funkcji f w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej.

D c) Wykaż, że funkcja f ma miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \left(-\infty, \frac{1}{8}\right\rangle$.

D 3.48. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej k funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + (k-1)x + \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{4}k$ ma dwa miejsca zerowe. Następnie wyznacz wartość k, dla której suma miejsc zerowych funkcji f jest mniejsza od 9.

Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu

3.49. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f i omów własności tej funkcji poprzez odpowiedzi na następujące pytania:

1) Jaka jest dziedzina funkcji?
2) Jaki jest zbiór wartości funkcji ?
3) Czy funkcja f ma miejsce zerowe? Jeśli tak, to jakie?
4) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne?
5) W jakich przedziałach funkcja jest rosnąca, a w jakich malejąca?
6) Czy funkcja przyjmuje wartość największą, czy najmniejszą? Jeśli tak, to dla jakiego argumentu?

a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
c) $f(x) = 3x^2 - 6x$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$
e) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$
f) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

3.50. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f i omów jej własności, jeśli:

a) $f(x) = 2(x-1)(x+1)$
b) $f(x) = -(x-1)(x-5)$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4{,}5$
e) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$
f) $f(x) = -2x(x-2)$.

3.51. Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g. Następnie rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = (x+2)^2$, $g(x) = 1$
b) $f(x) = -(x-1)^2 - 1$, $g(x) = -5$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)(x+2)$, $g(x) = -x - 2$
d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$, $g(x) = x - 1$

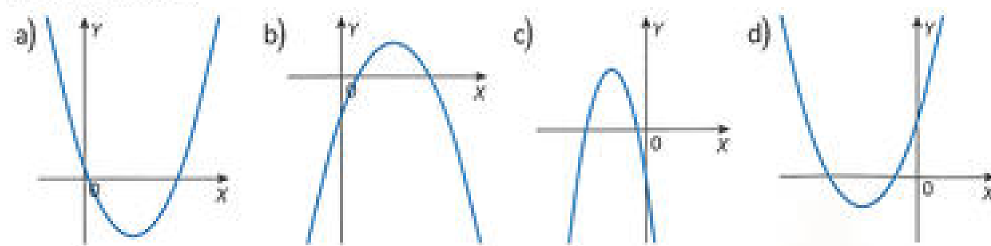
3.52. Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykres funkcji kwadratowej f i wykres funkcji liniowej g. Następnie rozwiąż graficznie nierówność, podaną obok wzorów funkcji i g.

a) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$, $g(x) = x + 1$, $f(x) \geq g(x)$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$, $g(x) = -2x - 3$, $f(x) > g(x)$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 3\frac{1}{4}$, $g(x) = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$, $f(x) < g(x)$

3.53. Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji kwadratowych f i g. Następnie rozwiąż graficznie nierówność, podaną obok wzorów tych funkcji.

a) $f(x) = -x^2 - 4x$, $g(x) = x^2 + 2x + 4$, $g(x) \geq f(x)$
b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 + 4x + 3$, $f(x) < g(x)$
c) $f(x) = x^2 - 3x - 4$, $g(x) = x^2 + 3x - 4$, $f(x) \geq g(x)$

3.54. Ustal znaki współczynników a, b, c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, na podstawie szkicu wykresu tej funkcji w układzie współrzędnych.



3.55. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, \text{ jeśli } x\in(-\infty, 3) \\ -x+6, \text{ jeśli } x\in\langle 3, +\infty) \end{cases}$ i na jego podstawie:

a) wyznacz przedziały, w których funkcja f jest malejąca

b) podaj miejsca zerowe tej funkcji

c) odczytaj zbiór, w którym funkcja przyjmuje wartości ujemne.

3.56. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases} -2x^2-8x-6, \text{ jeśli } x\in(-\infty, 0) \\ -6, \text{ jeśli } x\in\langle 0, +\infty) \end{cases}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Podaj zbiór wartości funkcji f.

c) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu –4.

d) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne?

3.57. Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności, jeśli:

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}x+2\frac{1}{4}, \text{ jeśli } x\in(-\infty, 1\rangle \\ x^2-6x+8, \text{ jeśli } x\in(1, +\infty) \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -x+1, \text{ jeśli } x\in(-\infty, 2) \\ -\frac{1}{4}x^2+2x-4, \text{ jeśli } x\in\langle 2, 8\rangle \\ -4, \text{ jeśli } x\in(8, +\infty) \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+5, \text{ jeśli } x\in(-\infty, 0\rangle \\ x^2-6x+5, \text{ jeśli } x\in(0, +\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -x^2-10x-21, \text{ jeśli } x\in(-\infty, -4) \\ -\frac{3}{4}x, \text{ jeśli } x\in\langle -4, 0) \\ 0{,}75x^2-3x, \text{ jeśli } x\in\langle 0, +\infty) \end{cases}$

3.58. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases} -x-3, \text{ jeśli } x\in(-\infty, -4) \\ -\frac{1}{2}x^2-2x+1, \text{ jeśli } x\in\langle -4, 2) \\ \frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x-4\frac{1}{5}, \text{ jeśli } x\in\langle 2, +\infty) \end{cases}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Podaj zbiór wartości tej funkcji.

c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

d) Określ znak iloczynu: $f(-2\pi)\cdot f(\sqrt{2}+1)$.

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności

3.59. Wyznacz współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$ wiedząc, że funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe oraz $f(-4)=f(8)$.

3.60. Wyznacz współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x)=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ wiedząc, że miejscami zerowymi funkcji f są liczby 9 oraz –6.

3.61. Funkcja kwadratowa $f(x)=-2x^2+bx+c$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$. Wiedząc, że $f(-3)=-25$, oblicz współczynniki b i c.

3.62. Funkcja kwadratowa $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ ma jedno miejsce zerowe, a jej wykres przecina oś OY w punkcie $P(0, -8)$. Wyznacz wartości współczynników b i c.

3.63. Osią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=3x^2+bx+c$, jest prosta o równaniu $x=-2$. Wiedząc, że najmniejsza wartość funkcji f jest równa –4, oblicz współczynniki b i c.

3.64. Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że przyjmuje ona wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(-8, -2)$, a największa wartość tej funkcji jest równa $2\frac{1}{4}$.

3.65. Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej jeśli wiadomo, że funkcja ta przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, a do jej wykresu należy punkt $A(1, 12)$.

3.66. Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że do wykresu tej funkcji należy punkt $P(-1, 1)$, zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 4\rangle$, a maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca, to $\langle -2, +\infty)$.

3.67. Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że dla argumentu 3 funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość, równą -2, a jednym z miejsc zerowych tej funkcji jest liczba 1.

3.68. Funkcja kwadratowa f ma tylko jedno miejsce zerowe. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że prosta o równaniu $x - 5 = 0$ jest osią symetrii wykresu tej funkcji, a punkt $A\left(2, -1\frac{4}{5}\right)$ należy do tego wykresu.

3.69. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $\langle -2, +\infty)$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej 30. Napisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej wiedząc, że suma jej miejsc zerowych jest równa 16.

3.70. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty, 162\rangle$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $B(0, 90)$, a osią symetrii tego wykresu jest prosta o równaniu $x = 6$. Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

3.71. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba 4, a najmniejsza wartość tej funkcji jest równa $-144{,}5$. Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja jest rosnąca to $\langle -13, +\infty)$.

3.72. Punkt $A(-6, 8)$ należy do wykresu tej funkcji kwadratowej f. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej wiedząc, że $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} - \{-2\}$.

3.73. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej wiedząc, że prosta o równaniu $y = 90$ przecina wykres tej funkcji w punktach o odciętych -5 oraz -1, zaś największa wartość tej funkcji jest równa 98.

3.74. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci iloczynowej wiedząc, że suma jej miejsc zerowych jest równa 3, zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -6\frac{3}{4}, +\infty\right)$, a wykres tej funkcji przecina oś OY w punkcie o rzędnej -6.

3.75. Funkcja kwadratowa f przyjmuje wartości nie większe od 18 wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 6, +\infty)$. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej wiedząc, że wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji należy do prostej o równaniu $y = 24$.

3.76. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + 12\frac{1}{2}$, $a \neq 0$, dla argumentu 3 przyjmuje najmniejszą wartość, równą 8. Wyznacz wartości współczynników a i b.

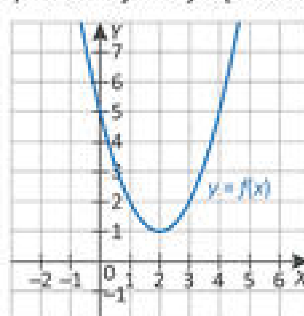
3.77. Średnia arytmetyczna miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx$, $a \neq 0$, jest równa 3. Rzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f, wynosi 36. Wyznacz wartości współczynników a i b.

3.78. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe 2 oraz 3. Wyznacz wartości współczynników a, b, c wiedząc, że ich suma jest równa -4.

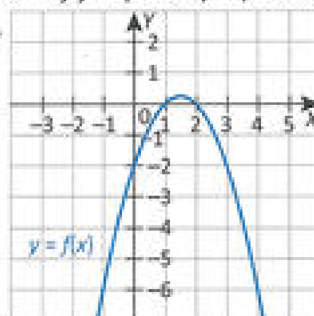
Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

3.79. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Odczytaj z wykresu najmniejszą oraz największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

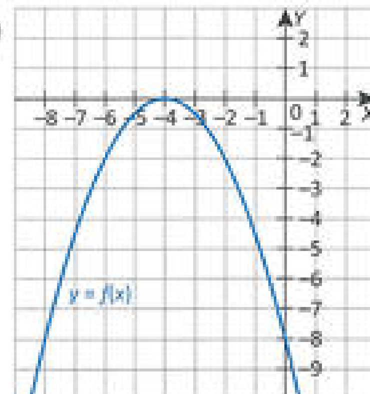
a) $\langle 1, 4\rangle$



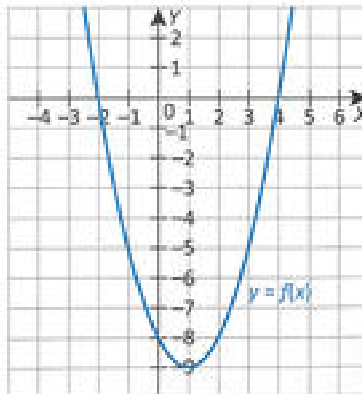
b) $\langle 3, 4\rangle$



c) $\langle -4, -2\rangle$



d) $\langle 0, 3\rangle$



3.80. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu najmniejszą oraz największą wartość funkcji f w podanym przedziale, jeśli:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 5,\ x \in \langle 0, 3\rangle$

b) $f(x) = 1\frac{3}{4} + \left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2,\ x \in \langle -1, 0\rangle$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2,\ x \in \langle 2, 4\rangle$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+2),\ x \in \langle -4, -2\rangle$.

3.81. Nie szkicując wykresu funkcji kwadratowej, oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale, jeśli:

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2,\ x \in \langle 0, 3\rangle$

b) $f(x) = -\frac{3}{4}(x-1)^2 + 5,\ x \in \left\langle \frac{1}{2}, 2\right\rangle$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 5,\ x \in \langle -2, -1\rangle$

d) $f(x) = \sqrt{3}(x-2)(x+8),\ x \in \langle -2, 1\rangle$

e) $f(x) = \frac{1}{4}(x-5)(x+5),\ x \in \langle -1, \sqrt{2}\rangle$

f) $f(x) = \frac{1}{5}(x-4)^2 + 9,\ x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$.

3.82. Funkcja kwadratowa f opisana jest wzorem $f(x) = -3x^2 - 12x + 96$.

a) Czy funkcja f ma wartość najmniejszą, czy największą? Ile ta wartość wynosi i dla jakiego argumentu jest przyjmowana?

b) Bez obliczania wartości funkcji uzasadnij, że $f(\sqrt{3}) < f(-\sqrt{3})$.

c) Oblicz największą oraz najmniejszą wartość tej funkcji w przedziale $\langle -4, -3\rangle$.

3.83. Funkcja kwadratowa f ma następujące własności: $f(-3) = 0$ oraz $f(-1) = f(5) = 3$.

a) Czy funkcja kwadratowa ma wartość najmniejszą, czy największą? Dla jakiego argumentu ta wartość jest przyjmowana?

b) Podaj najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle 5, 7\rangle$.

3.84. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że w przedziale $\langle 1, 2\rangle$ funkcja f przyjmuje największą wartość równą 5, a jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(3, 2)$.

3.85. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że funkcja f przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-2, 4)$, a największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 3, 6\rangle$ jest równa 4.

3.86. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 6\rangle$, największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -7, -5\rangle$ jest równa 4, a osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x + 3 = 0$.

3.87. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że jej miejscami zerowymi są liczby 1 i -3, a najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -2, 0\rangle$ jest równa -8.

3.88. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe, $f(2) = f(10)$ oraz największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 8, 9\rangle$ jest równa -2.

3.89. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba 2, a największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 10, 12\rangle$ jest równa 10. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej wiedząc, że jej wykres jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = 5$.

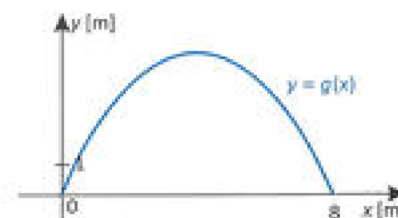
3.90. Największa wartość funkcji kwadratowej f w przedziale $\langle -3, 0\rangle$ jest równa 4, a najmniejsza wartość w tym przedziale jest równa 1. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca, to $(-\infty, -2\rangle$.

3.91. Największa wartość funkcji kwadratowej f w przedziale $\langle -5, -4\rangle$ jest równa -14. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja jest malejąca to $\langle -1, +\infty)$ oraz $f(1) = -4$.

3.92. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej wiedząc, że w przedziale $\langle -5, -3\rangle$ funkcja f przyjmuje największą wartość, równą 3 oraz $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} - \{-2\}$.

Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

3.93. Tor lotu piłki przedstawiony na rysunku obok, opisuje wzór: $h(x) = -0{,}25x^2 + 2x$, gdzie $x \in \langle 0, 8\rangle$. Na jaką maksymalną wysokość wzniosła się piłka?



3.94. Funkcja $f(x) = \frac{-x^2 + 6x + 21}{2}$ opisuje wydajność pracy robotnika w zależności od czasu pracy x, w ciągu 8-godzinnego dnia pracy. Robotnik rozpoczyna pracę o godzinie 7^{00}. O której godzinie jego wydajność jest największa?

3.95. Pewne ciało w czasie t [s] przebyło drogę S [m], którą opisuje wzór $S(t) = t^2 + 5t + 8$, gdzie $t \in \langle 1, 5 \rangle$. Oblicz:

a) długość drogi przebytej przez to ciało w ciągu czterech sekund

b) średnią prędkość ciała.

3.96. Rzucono kamień z prędkością początkową 10 m/s pionowo do góry. Wysokość S [m], jaką osiągnie kamień po t sekundach, określona jest w przybliżeniu funkcją $S(t) = 10t - 5t^2$. Jaką maksymalną wysokość osiągnie ten kamień?

3.97. Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy takich dwóch liczb, których suma kwadratów jest najmniejsza.

3.98. Liczbę 30 przedstaw w postaci różnicy takich dwóch liczb, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

3.99. Liczbę 18 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, aby suma ich sześcianów była najmniejsza.

3.100. Większa część uczniów klasy liczącej 31 osób zachorowała na grypę. Zdrowi uczniowie postanowili wysłać chorym kolegom kartki z pozdrowieniami. Wiedząc, że każdy zdrowy uczeń wysłał do każdego chorego kolegi kartkę, oraz że liczba wysłanych kartek była największa z możliwych, oblicz ilu uczniów zachorowało na grypę.

3.101. Krótszy bok prostokąta o wymiarach 5 cm × 8 cm zwiększamy o x cm, a dłuższy bok zmniejszamy o x cm.

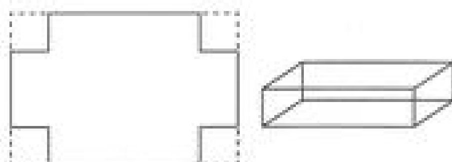
a) Wyznacz wzór funkcji opisującej pole nowego prostokąta w zależności od x; podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiej długości x pole otrzymanego prostokąta jest największe? Oblicz to pole.

3.102. Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 20 cm × 30 cm odcięto w rogach kwadraty, których boki mają długość x cm. Następnie po zagięciu powstałych brzegów zbudowano prostopadłościenne (otwarte) pudełko, jak na rysunku poniżej.

a) Wyznacz wzór funkcji opisującej pole powierzchni bocznej tego pudełka w zależności od długości boku wyciętego kwadratu; podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiej długości x pole powierzchni bocznej pudełka jest największe z możliwych? Oblicz to pole.



3.103. Suma długości podstawy trójkąta i wysokości opuszczonej na tę podstawę wynosi 30 cm. Wyznacz długość podstawy tak, aby pole trójkąta było największe.

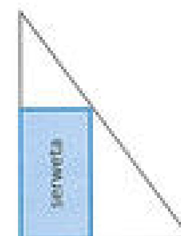
3.104. Właściciel gospodarstwa agroturystycznego chce wygrodzić w ogrodzie prostokątny plac zabaw dla dzieci. Dysponuje płotem długości 84 m, a powierzchnia placu ma być możliwie największa. Wyznacz wymiary tego placu zabaw i oblicz jego powierzchnię (w arach).

3.105. Gospodarz chce siatką o długości 12 m wygrodzić na podwórku prostokątny wybieg dla psa, przylegający jednym bokiem do budynku. Jakie wymiary powinien mieć ten wybieg, aby jego pole powierzchni było największe? Oblicz powierzchnię tego największego wybiegu.

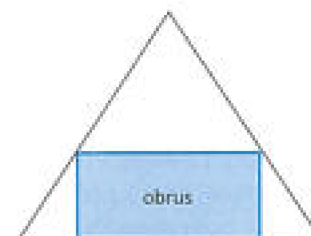


3.106. Strona książki ma obwód 68 cm. Oblicz, jakie wymiary powinna mieć strona tej książki, aby zapewnić maksymalną powierzchnię druku, jeśli założymy, że marginesy boczne i dolny będą jednocentymetrowe, zaś margines górny – dwucentymetrowy.

3.107. Z kawałka płótna w kształcie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 2 m i 1,5 m hafciarka chce wyciąć prostokątną serwetkę w sposób przedstawiony na rysunku obok. Jakie powinny być wymiary serwetki, aby jej pole było największe?



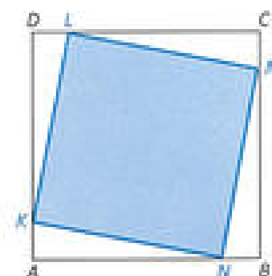
3.108. Z kawałka płótna w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie 4 m i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 3 m hafciarka chce wyciąć prostokątny obrus w sposób przedstawiony na rysunku obok. Jakie powinny być wymiary obrusa, aby jego powierzchnia była największa?



3.109. Na bokach kwadratu o polu 16 cm^2 zaznaczamy punkty K, L, M, N tak, że $|AK| = |DL| = |CM| = |BN|$, jak na rysunku obok.

a) Oznacz literą x długość odcinków AK, DL, CM oraz BN. Napisz wzór funkcji pola czworokąta $KLMN$ w zależności od x. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Jak należy wybrać punkty K, L, M, N, aby pole czworokąta $KLMN$ było najmniejsze?



3.110. Właściciel sklepu kupuje aparaty fotograficzne, płacąc producentowi 1200 zł za sztukę. Następnie sprzedaje miesięcznie 40 sztuk takich aparatów po 1800 zł za sztukę. Sprzedawca oszacował, że każda obniżka ceny aparatu o 10 zł w jego sklepie zwiększy liczbę sprzedanych aparatów o jedną sztukę. Jaką powinien ustalić cenę, aby jego miesięczny zysk był największy?

3.111. Firma ma 180 lokali użytkowych i zajmuje się wynajmem tych lokali na działalność usługową. Obecnie wszystkie lokale są wynajęte, a miesięczna opłata za wynajem każdego lokalu wynosi 1200 zł. Firma postanowiła zoptymalizować swój miesięczny zysk i wprowadzić podwyżkę. W tym celu oszacowano, że każda podwyżka ceny o 40 zł spowoduje zmniejszenie o 5 liczby wynajmowanych pomieszczeń. Jaką miesięczną cenę wynajmu każdego lokalu powinna ustalić ta firma, aby jej zysk był największy? Ile wynosi ten największy miesięczny zysk?

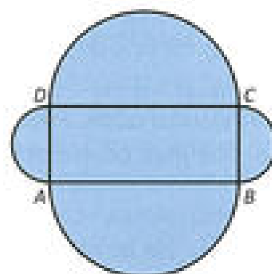
3.112. Hotel ma 60 pokoi. Opłata za dobę hotelową w każdym pokoju wynosi 320 zł. Właściciel hotelu udziela specjalnej zniżki firmom rezerwującym więcej niż 30 pokoi. Wówczas dobowa opłata za każdy wynajęty pokój jest niższa o 4 złote pomnożone przez liczbę pokoi, które firma rezerwuje ponad liczbę 30.

a) Jaka liczba rezerwowanych przez daną firmę pokoi dawałaby hotelowi największy przychód na dobę?

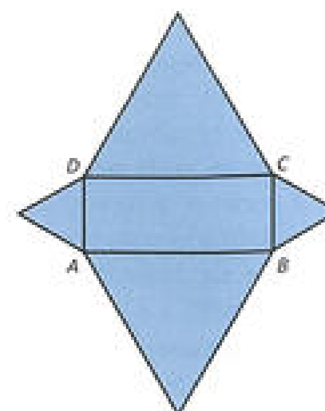
b) Przy jakiej liczbie wynajętych pokoi właściciel hotelu osiągnie największy zysk, jeśli uwzględni koszt sprzątania i obsługi każdego pokoju, równy 24 złote za dobę?

3.113. Drut długości 2 m trzeba podzielić na dwa kawałki: z jednego powstanie kwadratowa ramka, a z drugiego ramka prostokątna, której długości boków pozostają w stosunku 1 : 3. Jaką długość powinien mieć każdy z tych kawałków drutu, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

3.114. Na bokach prostokąta $ABCD$ o obwodzie 24 cm opisano półkola, jak na rysunku obok. Jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt, aby pole figury będącej sumą pola prostokąta i pól dorysowanych półkoli było najmniejsze?



3.115. Na bokach prostokąta $ABCD$ o obwodzie 100 cm dorysowano trójkąty równoboczne, jak na rysunku obok. Jakie powinny być długości boków prostokąta, aby pole figury będącej sumą pola prostokąta i pól dorysowanych trójkątów było najmniejsze?



3.116. Drut długości 100 cm podzielono na dwie części: z jednej zbudowano kwadratową ramkę, a z drugiej okrąg. Jaka powinna być długość każdej części, aby suma pól figur ograniczonych drutem była najmniejsza?

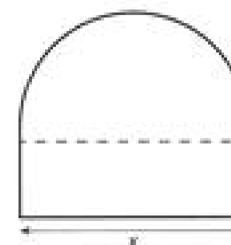
3.117. Drut o długości 8 m należy podzielić na dwa kawałki: z jednego powstanie kwadratową ramka, a z drugiego – ramka w kształcie trójkąta równobocznego. Jaką długość powinien mieć każdy z tych kawałków, aby suma pól kwadratu i trójkąta była najmniejsza?

3.118. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem, jak na rysunku obok. Obwód okna ma 4 m. Oznacz długość podstawy prostokąta przez x. Następnie:

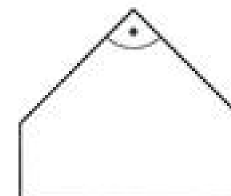
a) napisz wzór funkcji pola P powierzchni okna, w zależności od x

b) określ dziedzinę funkcji P

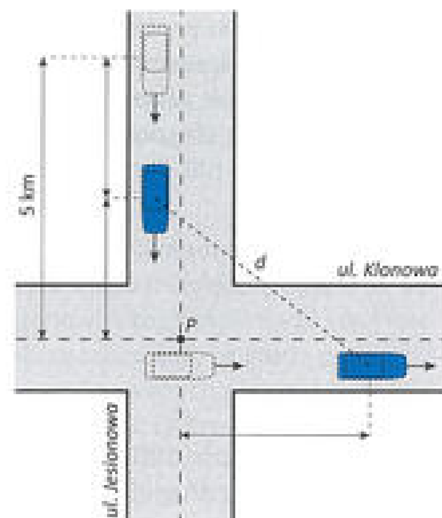
c) wyznacz długość podstawy prostokąta tak, aby pole powierzchni okna było największe.



3.119. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze trójkątem prostokątnym równoramiennym, jak na rysunku obok. Obwód okna wynosi 4 m. Jaka powinna być podstawa okna, aby jego powierzchnia była największa?



3.120. Ulica Klonowa jest prostopadła do ulicy Jesionowej, a środek skrzyżowania ulic znajduje się w punkcie P. W chwili t_0 samochód podróżujący na wschód ze stałą prędkością 40 km/h mija punkt P, a samochód podróżujący na południe ze stałą prędkością 60 km/h znajduje się dokładnie 5 km na północ od punktu P.



a) Wyznacz wzór funkcji $y = d(t)$, opisujący odległość $[\text{km}]$ między tymi samochodami w zależności od czasu t $[\text{h}]$.

b) Oblicz, po jakim czasie t od chwili t_0 odległość między samochodami będzie najmniejsza. Oszacuj tę odległość z dokładnością do 0,1 km.

Równania kwadratowe

3.121. Rozwiąż równanie:

a) $(x+2)^2 = 0$ b) $4x^2 - 7x = 0$ c) $3x^2 + 8 = 0$
d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ e) $3x^2 - 6 = 0$ f) $(x+3)(x-7) = 0$

3.122. Rozwiąż równanie:

a) $81x^2 = 25$ b) $1 - 4x^2 = 0$ c) $\frac{1}{2}(x^2+2) = 7$
d) $(x-3)^2 = 25$ e) $2(x+1)^2 = 18$ f) $(x-13)^2 + 1 = 0$

3.123. Rozwiąż równanie:

a) $2x^2 + 5x - 12 = 0$ b) $3x^2 - 7x = 20$ c) $9x^2 = 12x - 4$
d) $2(x^2 + 4) = -3x$ e) $49x^2 = 4x$ f) $16x^2 + 25 = 40x$

3.124. Rozwiąż równanie:

a) $3x^2 + 5x = 2$ b) $5x = 2x^2 + 3$ c) $4x - x^2 = 7$
d) $6(x^2 + 2) = 4(3 - x)$ e) $5x^2 = 2 - 9x$ f) $(2x+3)^2 = 8x + 8$

3.125. Rozwiąż równanie:

a) $(2x+6)(5-x) = 0$ b) $5x(x+2) - 3x = 0$
c) $x(x-1) + 3(x-1) = 0$ d) $(x+1)^2 - 100 = 0$
e) $4 - (x+3)^2 = 0$ f) $x(x+2) = x + 2$

3.126. Rozwiąż równanie:

a) $x(x+5) = x + 5$ b) $(x+1)^2 = (x+1)$
c) $x^2 = (4-x)(x+4)$ d) $x(2x-1) = (1-2x)(1+2x)$
e) $81 - (3x+7)^2 = 0$ f) $(2x+1)(2x+1) = 4$

3.127. Rozwiąż równanie:

a) $(x+1)(2x-3) + (x+1)x = 0$ b) $(3x-1)(3x+1) = 10x^2 + 3$
c) $(5x+1)^2 = (7x-2)^2$ d) $(2x-7)^2 = (4x-1)^2$
e) $(3x-1)(4x-3) = (3x-1)(2x-1)$ f) $(2x-1)^2 - 3x^2 = 6(x-4)$

3.128. Rozwiąż równanie:

a) $x^2 - (3x-1)^2 = 56x - 43$ b) $11 - 14x = (2x+1)^2$
c) $(-2x-1)(1+2x) = 8$ d) $2x^2 + 11x + 21 = (-x+5)(5+x)$
e) $(2x-3)(x+1) = 1 + (x+2)(3x-2)$ f) $(3x-1)^2 - (2x-3)^2 + 2(x+6) = x^2$

3.129. Rozwiąż równanie:

a) $(2x-3)(2x+3) = (x+5)^2 - 9$
b) $2x(x-3) - (x+1)(x+2) = (2x-3)^2$
c) $(2x-1)^2 - (4x+1)(4x-1) = 4x(1-2x)$
d) $(2x+1)^2 - 9(x-1)^2 = 4 - x$
e) $(x-1)^2 + 2(x-3)^2 = 18 - 10x$
f) $(2x+5)^2 - (2x-5)^2 = 3x^2 + 41x - 4$

3.130. Rozwiąż równanie:

a) $8x - 2x(3x-1) = 2x^2 + 3$ b) $x^2 - 5x + 9 = 63 - (x-3)(x+3)$
c) $(2x-4)(2x+4) = (3x-1)^2 - 16$ d) $6 - (1-x)^2 = (2x-3)^2 - (3x+2)^2$
e) $(x^2 - 3x + 1)(x+2) = x^3 - 2x - 1$ f) $(2x-3)(3x+5) = (3-2x)(x+3)$

3.131. Rozwiąż równanie:

a) $(2x+5)^2 - x(x+20) = 0$ b) $x(4-x) = (2x+3)(x-2) + 8$
c) $8x(7-3x) + 1 = 4(2-x)(x+2)$ d) $(4-x)^2 - (2+x)^2 = x^2 + 12$
e) $(2x-1)(2x+1) + 2 = 9x - 5x(x+3)$ f) $(x-6)(6+x) = (4x+3)^2 - (2-x)^2$

3.132. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{(x-2)(2-x)}{2}-\frac{x^2-3x}{4}=-2+3x-x^2$

b) $\frac{(3-x)(x+3)}{3}-\frac{(x+2)^2-4}{6}=\frac{5\frac{1}{3}-x}{2}$

c) $\frac{(2x-3)(x+1)}{5}-\frac{(x-1)(x+1)}{2}=x+3$

d) $\frac{(3x-1)^2-4}{3}-\frac{10}{3}x^2-\frac{5+(2-x)(x+2)}{2}=-x-7$

3.133. Rozwiązaniem danego równania z niewiadomą x jest liczba podana obok tego równania. Oblicz a.

a) $5+(a^2-18)x+6x^2=0;\ 2\frac{1}{2}$
b) $15x^2+(a^2+2a-2)x=6;\ -\frac{2}{3}$

3.134. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $x^2+x=6$
b) $x=(2-x)^2$
c) $\frac{1}{2}x^2+2=-\frac{1}{2}(x-2)^2+4$
d) $x^2+5x+6=4\frac{1}{4}-\left(x+2\frac{1}{2}\right)^2$

D **3.135.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a, równanie $\frac{1}{4}x^2+(3-4a)x+8(2a^2-3a)+9=0$ ma tylko jedno rozwiązanie. Wyznacz to rozwiązanie.

D **3.136.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej m, równanie $x^2-2mx+m^2-1=0$ ma dwa różne rozwiązania, których suma jest równa $2m$.

D **3.137.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej k, równanie $x^2-(2k-5)x-5=0$ ma dwa różne rozwiązania, których iloczyn jest równy –5.

Równania prowadzące do równań kwadratowych

3.138. Rozwiąż równanie:

a) $x^4=16x^2$
b) $x^4-10x^2+25=0$
c) $x^4=3-2x^2$
d) $x^4+12x^2+35=0$
e) $4x^4+9=37x^2$
f) $x^4+2x^2=24$.

3.139. Rozwiąż równanie:

a) $x^4=5x^2-4$
b) $x^4+5x^2=14$
c) $x^4-25x^2+144=0$
d) $x^4-25x^2=0$
e) $x^2(x^2+8)+15=0$
f) $4x^4+3(3x^2-1)=-2x^2$.

3.140. Rozwiąż równanie:

a) $4x^2(x^2-2)-2=5(x-1)(x+1)$
b) $(x^2+1)^2=3+x^2-5x^4$
c) $x^2(2x-1)(2x+1)=2-x^2(x^2+10)$
d) $(x^2-x+3)(x^2+2x)=x(6+x^2)$
e) $(x^2-3)^2-24=2x^4-14x^2$
f) $3(x^4+3)=(x^2-1)^2+12x^2$.

3.141. Rozwiąż równanie:

a) $x^4-18x^2=(x^2-9)(2x^2+3)+23$
b) $(x^2+6)(7-x^2)-36=x^4+12x^2$
c) $(2x^2-1)^2-(2x^2+3)^2=x^4+56$
d) $(x^2-1)^2-4(x^2-1)+4=0$
e) $(2x^2+3)(2x^2-3)+10=5x^4$
f) $(x^2-1)^2-(9x^2-4)=5-7x^2$.

3.142. Rozwiąż równanie:

a) $(x^2-4)^2=9(x^2-4)$
b) $(x^2+3)^2-5(x^2+3)+4=0$
c) $(x^2+2x)^2+9=6x^2+12x$
d) $(x^2-8x)^2+5=2(x^2-8x)$
e) $(x^2-x)^2=20x^2-20x$
f) $(x^2+3x-1)^2+7(x^2+3x-1)=-12$.

3.143. Rozwiąż równanie:

a) $x+4=5\sqrt{x}$
b) $2x-7\sqrt{x}+3=0$
c) $7\sqrt{x}=3x+2$
d) $2x+1=3\sqrt{x}$
e) $x+\sqrt{x-1}=7$
f) $x+5\sqrt{x+2}+8=0$

3.144. Rozwiąż równanie:

a) $\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=0$
b) $0{,}5\sqrt[3]{x^2}-2{,}5\sqrt[3]{x}+3=0$
c) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{7}{3}\sqrt[4]{x}=6$
d) $2\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}+6=0$

3.145. Rozwiąż równanie:

a) $x^2-2\sqrt{x^2+1}-2=0$
b) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$
c) $2x^2-5\sqrt{x^2+2}+6=0$
d) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

3.146. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{\sqrt{x+3}}{2}=2\sqrt[4]{x+3}-2$
b) $6\sqrt{x+2}+7\sqrt[4]{x+2}+2=0$
c) $2\sqrt{x-1}-5\sqrt[4]{x-1}=-3$
d) $\sqrt{x-5}=4\sqrt[4]{x-5}-3$

Nierówności kwadratowe

3.147. Rozwiąż nierówność:

a) $2x^2 + 1 > 0$ b) $\frac{x^2}{4} \leq 0$ c) $-3x^2 + 2x \geq 0$

d) $x^2 - 25 > 0$ e) $-x^2 - 4 > 0$ f) $x^2 \geq x$

3.148. Rozwiąż nierówność:

a) $-3\cdot(x-2)(x+4) > 0$ b) $9x^2 + 1 > 6x$ c) $x < 6x^2$

d) $(2x-1)(2x-1) \geq 0$ e) $x^2 + 4 > x$ f) $(5-x)(x+2) \geq 0$

3.149. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-3)^2 - 4 > 0$ b) $4x^2 - 2x \geq 5x^2$ c) $(1+x)(3-2x) \leq 0$

d) $x(x+6) \geq 6x - 8$ e) $x^2 - 3(x-3) < 9 - 3x$ f) $4x(x-1) \leq -1$

3.150. Rozwiąż nierówność:

a) $-4x^2 < 1$ b) $-2x(5-x) \leq 0$ c) $28x \geq 4x^2 + 49$

d) $x^2 < 2 - x$ e) $3x^2 + 1 > 2{,}5x$ f) $x - 7 \geq 5x^2$

3.151. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{1}{2}x^2 - x \geq 1$ b) $(2x-1)^2 > 16$ c) $9 + 25x^2 \leq 30x$

d) $(5x+1)^2 + 4 < 0$ e) $9x^2 + 4(3x+1) > 0$ f) $9 - (2x-1)^2 \geq 0$

3.152. Rozwiąż nierówność:

a) $8x - 1 > 16x^2$ b) $2x^2 + 4 \geq 3x$ c) $(2-x)(x+3) \leq 0$

d) $(2x-5)^2 \leq 0$ e) $-1 < -(1-x)^2$ f) $25x^2 > 4(5x-1)$

3.153. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-3)(2x+5) \leq (2x-6)(2x-1)$ b) $(2-8x)(x+1) > (1-4x)(x+2)$

c) $(3-5x)(2x+1) < (2x+1)(3x+2)$ d) $(2-6x)(3x+9) \geq x^2 - 9$

e) $(x+5)^2 \geq (2x+10)^2$ f) $(2x-3)^2 < (x-1{,}5)^2$

3.154. Rozwiąż nierówność:

a) $x(x+6) \leq 3(4x-3)$ b) $-2x^2 + 5(x+1) < 2(x+2) - 3x(x-1)$

c) $2x(x-2) - 7 > -4(x+3)$ d) $8(x-2) - x(x-2) \geq -16$

e) $9(1-x) \geq x^2 - 10x + 3$ f) $1 - 2x(x-3) < x(5-4x)$

3.155. Rozwiąż nierówność:

a) $(3-2x)(2x+3) > 1 - 2x(x+3)$ b) $(2x-3)^2 > (x+2)^2$

c) $x^2 + 6x + 9 \geq (2x-1)^2$ d) $(2x-1)(5x+3) + 13 \leq (3x-1)^2 + x$

e) $(-x-5)(5+x) + 9x \leq 2(x-1)^2$ f) $2(x-4)(x+4) > 3x(2x+3)$

3.156. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{(x-1)^2-2}{5} - \frac{x+3}{2} > \frac{(x+2)^2-43}{10}$

b) $\frac{(x+3)(2x-1)-(x+2)^2}{3} \leq \frac{x-1}{2} - \frac{3x+2}{3}$

c) $\frac{x - \frac{x^2-4}{2}}{5} \geq \frac{3 - \frac{(x+2)^2}{4}}{2} + \frac{1}{8}$

d) $\frac{x^2-2x+3}{3} - \frac{x^2+4}{24} < \frac{(x-1)^2 - \frac{x-4}{2}}{3}$

3.157. Rozwiąż graficznie nierówność:

a) $x^2 - 6x + 9 \leq -x + 5$ b) $-x^2 - 1 < -x - 3$ c) $x^2 + 2x - 3 \geq -2x - 3$

d) $x - 8 < x^2 + x - 6$ e) $x^2 + 2x - 3 \leq \frac{1}{5}(x-1)^2$ f) $\frac{1}{9}x(6-x) < (x-3)^2 + 1$

3.158. Podaj przykład nierówności kwadratowej:

a) sprzecznej
b) której zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 4, +\infty)$
c) której zbiorem rozwiązań jest zbiór $\boldsymbol{R}$
d) której zbiór rozwiązań jest jednoelementowy
e) której zbiorem rozwiązań jest przedział liczbowy $(2, 7)$
f) której zbiorem rozwiązań jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-5\}$.

3.159. Dana jest nierówność kwadratowa $(3x-4)(2x+a) < 0$ z niewiadomą x. Wyznacz liczbę a, dla której zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $\left(1\frac{1}{3}, 4\right)$.

3.160. Dana jest nierówność kwadratowa $(5a-4x)(x-1) \geq 0$ z niewiadomą x. Wyznacz liczbę a, dla której zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $\langle -3, 1\rangle$.

3.161. Dana jest nierówność kwadratowa $(2x-3)(6x+5a) \leq 0$ z niewiadomą x. Wyznacz liczbę a, dla której jedynym rozwiązaniem nierówności jest liczba $1\frac{1}{2}$.

3.162. Wyznacz zbiory A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ oraz $B - A$, jeśli:
A – zbiór tych argumentów, dla których funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 6x + 5$ przyjmuje wartości nieujemne
B – zbiór tych argumentów, dla których funkcja kwadratowa $g(x) = x^2 + 3x$ przyjmuje wartości większe od 4.

3.163. Dane są zbiory:
$A = \{x\colon x \in \mathbf{R} \wedge x^2 \leq 4x\}$; $B = \{x\colon x \in \mathbf{Z} \wedge x^2 - 7x + 4 \geq 3x^2 - 5x\}$.
Wyznacz zbiory: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$.

3.164. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:
a) $f(x)=\sqrt{2x^2+x+8}$
b) $f(x)=\sqrt{4x-2x^2}$
c) $f(x)=\sqrt{3x^2+9x-12}$
d) $f(x)=\sqrt{-4x^2+4x-1}$
e) $f(x)=\dfrac{5x+7}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$
f) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{\sqrt{25x^2-40x+16}}$.

3.165. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \mathbf{R}$, dla których liczba x należy do podanego przedziału liczbowego, jeśli:
a) $x = m^2 - 4m$, $x \in (5, +\infty)$
b) $x = 5 + 2m - 2m^2$, $x \in (-\infty, -7)$
c) $x = m^2 - 3m$, $x \in (-2, 4)$
d) $x = m^2 + 5m + 1$, $x \in \langle -5, -3\rangle$

3.166. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych, jeśli:
a) $f(x)=\sqrt{2x^2-mx+2}$
b) $f(x)=\sqrt{3x^2+mx-m-3}$
c) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+(m-1)x+4}}$
d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+(m+2)x+m^2}}$.

Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

3.167. Suma kwadratów dwóch liczb różniących się o 4 jest równa 400. Wyznacz te liczby.

3.168. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 308. Wyznacz te liczby.

3.169. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 155. Wyznacz te liczby.

3.170. W liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek, zaś cyfra jedności o 1 mniejsza od cyfry dziesiątek. Kwadrat cyfry dziesiątek jest równy sumie kwadratów pozostałych cyfr. Wyznacz tę liczbę.

3.171. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 5. Jeśli tę liczbę pomnożymy przez liczbę dwucyfrową o takich samych cyfrach, ale zapisanych w odwrotnej kolejności, to otrzymamy 736. Wyznacz tę liczbę.

3.172. W trzycyfrowej liczbie naturalnej cyfra setek jest taka sama jak cyfra jedności, zaś cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności. Jeżeli tę liczbę zmniejszymy o kwadrat sumy jej cyfr, to otrzymamy 105. Wyznacz tę liczbę trzycyfrową.

3.173. Ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest o 117 większa od liczby jego boków?

3.174. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Następnie połączono te punkty odcinkami. Ile jest tych punktów, jeśli wyznaczyły one 15 odcinków?

3.175. Do turnieju siatkówki zgłosiły się reprezentacje klas pierwszych pewnego liceum. Klasy rozegrały każda z każdą po jednym meczu. Wszystkich meczów rozegrano 10. Ile klas brało udział w tym turnieju?

3.176. Na jednym z osiedli mieszkaniowych znajduje się rabata kwiatowa w kształcie trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne różnią się o 7 m. Powierzchnia rabaty wynosi 30 m^2. Ile metrów płotka potrzeba na ogrodzenie tej rabaty?

3.177. Robotnik przeciął blachę w kształcie trójkąta prostokątnego wzdłuż wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, dzieląc ją na dwa trójkąty prostokątne. Wspólna przyprostokątna powstałych trójkątów ma długość 1,2 m, zaś drugie przyprostokątne różnią się o 70 cm. Oblicz powierzchnię kawałków blach po rozcięciu.

3.178. Prostokątny obraz bez ramy ma wymiary 82 cm × 36 cm, a wraz z ramą zajmuje powierzchnię 3567 cm^2. Oblicz, jaką szerokość ma rama tego obrazu.

3.179. Park miejski ma kształt rombu, którego obwód wynosi 2 km. Dwie główne alejki spacerowe wyznaczone są przez przekątne rombu, a jedna z nich jest o 200 m dłuższa od drugiej. Oblicz długość tych alejek.

3.180. W pewnym prostokącie jeden z boków skrócono, a drugi wydłużono o $p\%$ tak, że pole prostokąta zmniejszyło się o 9%. Oblicz p.

3.181. Drut długości 64 cm podzielono na dwa kawałki. Z jednego kawałka wykonano kwadratową ramkę, a z drugiego ramkę prostokątną, której stosunek długości boków jest równy 3 : 1. Oblicz długości kawałków drutu, wiedząc, że suma powierzchni wyznaczonych przez obie ramki wynosi 112 cm^2.

3.182. Kupiec ma dwie beczki wina dwóch różnych szczepów. Stosunek liczby litrów wina z pierwszej beczki do liczby litrów wina z drugiej beczki jest równy 3 : 2. Litr wina z pierwszej beczki kosztuje tyle złotych, ile jest równe 25% liczby litrów wina, znajdującego się w drugiej beczce. Litr wina z drugiej beczki jest o 10 zł droższy od litra wina z pierwszej beczki. Wiedząc, że łączna wartość win w obu beczkach jest równa 4800 zł, oblicz:

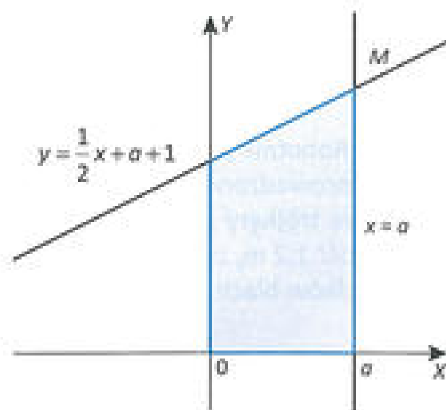
a) ile litrów wina jest w każdej beczce

b) cenę jednego litra każdego z tych win.

3.183. Pewna osoba zapytana, ile ma lat, odpowiedziała: „Jeżeli całkowitą liczbę moich lat pomnożymy przez liczbę o 50 mniejszą i do otrzymanego iloczynu dodamy 624, to otrzymamy liczbę ujemną". Czy na tej podstawie można ustalić, ile lat ma ta osoba?

3.184. Jak dobrać wymiary prostokąta, aby jego pole było nie mniejsze niż 5 nie większe niż 12, a długości boków były liczbami naturalnymi, różniącymi się o 4? Podaj wszystkie możliwości.

3.185. Proste o równaniach $y=\frac{1}{2}x+a+1$ oraz $x=a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą dodatnią, przecinają się w punkcie M i wraz z osiami układu współrzędnych ograniczają trapez prostokątny (zobacz rysunek obok).



a) Napisz wzór funkcji P – określającej pole tego trapezu w zależności od a, gdzie $a \in (0, +\infty)$.

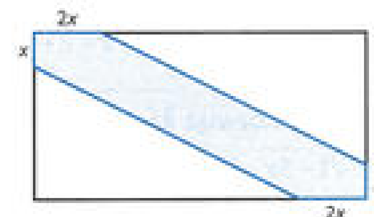
b) Wyznacz liczbę a, dla której pole trapezu jest równe 3.

c) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których pole trapezu jest większe od 24 i jednocześnie nie większe od 51.

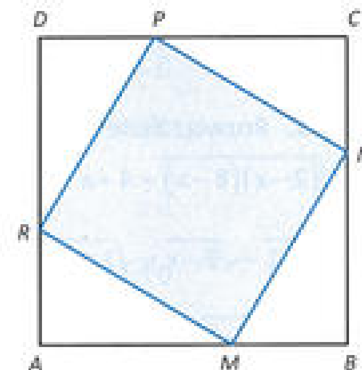
3.186. Wyznacz wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne o sumie cyfr równej 9, które spełniają warunek: iloczyn liczby i jej cyfry jedności jest większy od 144.

3.187. Ile jest wielokątów wypukłych, w których liczba przekątnych jest mniejsza od potrojonej liczby jego boków?

3.188. Przez działkę w kształcie prostokąta o wymiarach 20 m × 40 m ma przebiegać ścieżka w sposób pokazany na rysunku. Powierzchnia ścieżki może stanowić co najwyżej 9,75% całej powierzchni działki. Jaką największą wartość może przyjąć x?



3.189. W kwadrat $ABCD$ o boku 7 cm wpisano kwadrat $MNPR$ tak, że punkty M, N, P, R należą odpowiednio do boków AB, BC, DC oraz AD. Wiedząc, że pole kwadratu $MNPR$ jest równe 25 cm^2, oblicz długości odcinków, na jakie punkty M, N, P, R podzieliły boki kwadratu $ABCD$.



3.190. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30, a suma kwadratów długości wszystkich boków trójkąta wynosi 338. Wyznacz wysokość poprowadzoną na przeciwprostokątną.

Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego

3.191. Rozwiąż dane równanie, stosując metodę analizy starożytnych.

a) $\sqrt{1-3x}=-x-3$
b) $\sqrt{x+\sqrt{140+x}}=4$
c) $3(x+2)=\sqrt{22-9x}$
d) $\sqrt{x-1+\sqrt{x+2}}=3$
e) $\sqrt{x+1-\sqrt{x-3}}-2=0$
f) $\sqrt{3-4x}=2x$

3.192. Rozwiąż dane równanie, stosując metodę równań równoważnych.

a) $\sqrt{1-5x}=7+x$
b) $x+5=4+\sqrt{x+3}$
c) $\sqrt{4-x^2}=x$
d) $\sqrt{x^2-4x}=1-2x$
e) $\sqrt{x^2+3}=x^2-3$
f) $2\sqrt{25x^2-9}=9-x^2$.

3.193. Rozwiąż dane równanie, stosując metodę równań równoważnych.

a) $\sqrt{(2-x)(8-x)}=4-x$
b) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$
c) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$
d) $\sqrt{10+x}+\sqrt{10-x}=\frac{x}{3}$
e) $\sqrt{x^2-2x-3}-1=x$
f) $\sqrt{x^2-3}+x^2=5$.

3.194. Rozwiąż dane równanie, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $x^2-4\sqrt{x^2-4x}=4(x-1)$
b) $x^2-4x+4\sqrt{x^2-4x+3}=2$
c) $2x^2-5\sqrt{x^2-1}=0$
d) $x^2-5x+30=10\sqrt{x^2-5x+6}$

3.195. Rozwiąż równanie:

a) $\sqrt{5x^2+16x+12}=5x-2$
b) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$
c) $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=x$
d) $\sqrt{3x-2}+2=2\sqrt{x+2}$
e) $x^2-4x=2\sqrt{x^2-4x-5}+4$
f) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

3.196. Rozwiąż nierówność:

a) $\sqrt{x-2}<8-x$
b) $\sqrt{x+3}+3>x$
c) $7\sqrt{8-x}>20-x$
d) $\sqrt{10+x}<\frac{13+x}{4}$
e) $\sqrt{x^2+8}\geq 3x$
f) $2x\geq\sqrt{5-x^2}$

3.197. Rozwiąż nierówność:

a) $\sqrt{x^2-5x}\geq 4x$
b) $\sqrt{9-x^2}\leq x$
c) $\sqrt{(x+7)(x+1)}-3>x$
d) $\sqrt{x^2+4x-5}+x\geq 7$
e) $x>\sqrt{x^2+x-2}$
f) $2x<1+\sqrt{4x^2+x-14}$

3.198. Rozwiąż nierówność:

a) $x+1\geq\sqrt{(2-x)(x+3)}$
b) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\geq 2$
c) $\sqrt{17+x}+\sqrt{17-x}<8$
d) $\sqrt{12+5x-2x^2}+x>6$
e) $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$
f) $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}-4\geq 0$

3.199. Rozwiąż nierówność:

a) $\sqrt{3x^2+2x-1}\geq 2x$
b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}-1\leq 0$
c) $\sqrt{10+x}-6<-\sqrt{10-x}$
d) $4+\sqrt{12-2x^2}>3x$
e) $\sqrt{4x+5}>\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}$
f) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}<2$

3.200. Rozwiąż równanie:

a) $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1$

b) $\sqrt{3+x-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{8+x-6\sqrt{x-1}}=1$

c) $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}}-\sqrt{x-7+2\sqrt{x-8}}=1$

d) $\sqrt{x+19+8\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}=2$

Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną

3.201. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = |x - 3| \cdot (x - 1)$
b) $f(x) = (x + 1) \cdot |x - 2|$
c) $f(x) = x \cdot |x + 1| - x$
d) $f(x) = x^2 + 4|1 - x|$, gdzie $x \in \langle 0, 2 \rangle$

3.202. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = |x^2 + 1| - 2$
b) $f(x) = |2 - x| \cdot |2 + x|$
c) $f(x) = |x| \cdot |x - 3|$
d) $f(x) = |x^2 + 2(x - 4)|$.

3.203. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = x^2 - 4|x|$
b) $f(x) = |x|2 + |2x|$
c) $f(x) = 1 - (|x| - 2)^2$
d) $f(x) = 2 - 3|x| + x^2$

3.204. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = |x^2 - 1| + x^2$
b) $f(x) = |x^2 - 2x| - x^2$
c) $f(x) = |x^2 - 4| - 2x$
d) $f(x) = -x^2 - 3x + |x^2 + 3x|$.

3.205. Naszkicuj wykres danej funkcji, stosując odpowiednie przekształcenia.

a) $f(x) = |x^2 - 4| - 1$
b) $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$
c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 3$
d) $f(x) = |x^2 - 3|x| + 2| - 1$

3.206. Napisz wzór funkcji f bez symbolu wartości bezwzględnej i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$
b) $f(x) = |x^2 - 2| + \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$
c) $f(x) = 3x - \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$
d) $f(x) = |x^2 + 3x - 4| - |x^2 + 3x + 2|$

3.207. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x|x - 2| + x$, gdzie $x \in R$. Odczytaj z wykresu:

a) zbiór wartości funkcji f,
b) dla jakich argumentów wartość funkcji f wynosi 2,
c) przedziały, w których funkcja f jest rosnąca.

3.208. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |-x^2 + 4x + 5|$, $x \in R$. Czy funkcja f jest parzysta?

a) Podaj zbiór wartości funkcji f.
b) Rozwiąż nierówność $f(x) > 0$.
c) Określ przedziały monotoniczności funkcji f.

3.209. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -|x^2 - 2|x| - 3| + 2$, $x \in R$.

a) Czy funkcja f jest, czy nie jest: parzysta, nieparzysta?
b) Podaj liczbę miejsc zerowych funkcji f.
c) Określ znak liczby $f(-4) \cdot f(-1) + f(-3)$.

3.210. Zapisz wzór funkcji $f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 - x|$ bez użycia znaku wartości bezwzględnej.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = 4$.
c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > -x + 4$.

Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

3.211. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $(x - 3)^2 = 4|x - 3|$
b) $x^2 - 6|x| + 5 = 0$
c) $3(x + 2)^2 + 16|x + 2| + 5 = 0$
d) $x^2 + 4x + |x + 2| = 16$
e) $(x + 1)(|x| - 1) = -0{,}5$
f) $|4 - x - 0{,}5x^2| = 4$.

3.212. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a) $2x^2 - |x| = 15$
b) $|x^2 - 6x + 4| = 4$
c) $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$
d) $\frac{1}{2}(x-4)^2 = -|x-4|$
e) $|2x^2 - 2x - 1{,}5| = 2{,}5$
f) $2|x^2 - 3x + 8| = 2x^2 - 6x + 16$

3.213. Rozwiąż graficznie równanie:

a) $x^2 + 2x = 2|x + 1| - 2$
b) $(|x| - 4)(1 - |x|) = 5$
c) $0{,}5(x - 1)^2 + 2 = 2{,}5 \cdot |x - 1|$
d) $4 - 4|x| = -x^2$
e) $(2 - |x|)^2 = 4 - x$
f) $|x^2 - 4x| = |x - 2| + 2$.

3.214. Rozwiąż równanie:

a) $(x + 5)^2 = 3|x + 5|$
b) $(|x| - 1)(|x| + 1) = 3$
c) $4(x - 2)^2 + 11 \cdot |x - 2| = 3$
d) $x^2 + 2x + 3 = 3|x + 1|$
e) $x^2 = |x + 1| - |x - 1|$
f) $x \cdot |x| + |2x - 3| = 4$

3.215. Rozwiąż równanie:

a) $|x^2+2x+3|=|2x|$
b) $|4-x|=\left|\frac{1}{4}x^2-2x+4\right|$
c) $x^2+12=8x+|x^2-8x+12|$
d) $||x^2-3x|-1|=3$
e) $|x^2-9|=9-x^2$
f) $|x^2-1|+|x+1|=0$

3.216. Rozwiąż równanie:

a) $|x^2-3x|+x=2$
b) $|x^2-1|=3-|x^2-16|$
c) $|x^2+2x|-|x^2-x|=1$
d) $x^2-5|x+1|+25=3x+5|x-4|$
e) $|x^2-2|+|x^2-5|=3$
f) $x^2-1=4x-|x^2-5|$

3.217. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a) $|x^2+3x+1|\leq 1$
b) $x^2-|x|-2\geq 0$
c) $x^2+12>7|x|$
d) $|x^2-4x|<4|x|$
e) $(x-1)^2+|x-1|-6<0$
f) $(x+2)^2-9|x+2|<0$

3.218. Rozwiąż graficznie nierówność:

a) $|x^2-7|\geq|x^2-1|$
b) $|x^2-4|>x+2$
c) $(|x|-1)(|x|-3)\geq x+3$
d) $x^2-3|x|-4<0$
e) $|x^2+4x+3|\geq 3-x$
f) $|x^2-4|x|+3|\geq 3$

3.219. Rozwiąż nierówność:

a) $x^2+10\leq 7|x|$
b) $(x-1)^2+2x<1+3|x|$
c) $2x^2-3\cdot|2x-1|<2x-3$
d) $x^2+4x+|x-3|>-5$
e) $|x^2+6x-1|\geq 6$
f) $x\cdot|x+1|+2<x\cdot|x+2|$

3.220. Rozwiąż nierówność:

a) $\left|(x-3)^2-9\right|<9$
b) $|(x-2)(x+3)|>|x+3|$
c) $|x^2-|x|-2|>2$
d) $x^2-|x^2-5x|\geq 5x$
e) $x^2-5|x-1|\leq 2x-7$
f) $|x^2-1|+|x^2-3|>4$

Wzory Viete'a

3.221. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe. Nie obliczając tych miejsc zerowych, ustal ich znaki.

a) $f(x)=x^2+4x+3$
b) $f(x)=x^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}$
c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4\frac{1}{2}x+4$
d) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-7x-24$

3.222. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe, które są liczbami całkowitymi. Wyznacz te liczby, korzystając ze wzorów Viete'a.

a) $f(x)=x^2+5x+6$
b) $f(x)=x^2-2x-8$
c) $f(x)=x^2-8x+7$
d) $f(x)=x^2-12x+20$
e) $f(x)=-x^2-4x+5$
f) $f(x)=-x^2-6x+27$

3.223. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2. Wyznacz brakujące współczynniki we wzorze funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=x^2+bx+c$ oraz $x_1=-2{,}5$, $x_1+x_2=-1{,}5$
b) $f(x)=ax^2+2x+c$ oraz $x_1=-2$, $x_1\cdot x_2=-6$
c) $f(x)=ax^2+bx+42$ oraz $x_2=7$, $x_1+x_2=10$
d) $f(x)=ax^2+bx-4$ oraz $x_2=-4$, $x_1\cdot x_2=-8$.

3.224. Funkcja $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$, ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2. Określ znaki współczynników we wzorze funkcji f, wiedząc, że:

a) $f(0)=3$ oraz $x_1>0$ i $x_2>0$
b) $f(0)=-2$ oraz $x_1>0$ i $x_2>0$
c) $f(0)=5$ oraz $x_1<0$ i $x_2<0$
d) $f(0)=-1$ oraz $x_1<0$ i $x_2<0$
e) $f(0)=2$ oraz $x_1=x_2$ i $x_1+x_2>0$
f) $f(0)=-3$ oraz $x_1=x_2$ i $x_1+x_2<0$.

3.225. Funkcja $f(x)=2x^2+px+10$ ma dwa miejsca zerowe, które są liczbami całkowitymi. Wyznacz te miejsca zerowe i oblicz p.

3.226. Równanie $2x^2-6x+q=0$ ma dwa rozwiązania, które są liczbami naturalnymi. Wyznacz te rozwiązania i oblicz q.

3.227. Sprawdź, że funkcja $y=2\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}$ ma dwa miejsca zerowe. Następnie bez obliczania tych miejsc zerowych oblicz:

a) kwadrat ich sumy
b) sumę ich kwadratów.

3.228. Sprawdź, że funkcja $y=\sqrt{6}x^2-5\sqrt{3}x+2\sqrt{6}$ ma dwa miejsca zerowe. Następnie bez obliczania tych miejsc zerowych oblicz:

a) sumę ich odwrotności
b) sumę kwadratów ich odwrotności.

3.229. Funkcja $y=3\sqrt{2}x^2-4\sqrt{6}x+5$ ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

D **3.230.** Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $y=2\sqrt{5}x^2-4\sqrt{5}x+\sqrt{10}$. Wykaż, że $(x_1-x_2)^2+4(x_1^2+x_2^2)=20-6\sqrt{2}$.

D **3.231.** Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $y=\frac{2}{5}x^2-4x+5$. Wykaż, że $x_1^4+x_2^4=5312{,}5$.

3.232. Liczby $4-2\sqrt{3}$ i $4+2\sqrt{3}$ są miejscami zerowymi funkcji $y=x^2+(p+q)x+p^2-q^2$. Oblicz p i q.

3.233. Liczby $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ i $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ są rozwiązaniami równania $x^2-(p+q)x+q^2-8p=0$. Oblicz p i q.

3.234. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe, których suma wynosi $-2\frac{1}{2}$, a iloczyn jest równy $-1\frac{1}{2}$. Wiedząc, że do wykresu funkcji f należy punkt $A(1, 4)$, wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

3.235. Funkcja kwadratowa f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$, a jej miejsca zerowe x_1, x_2 spełniają warunek $x_1 \cdot x_2 = -5$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

3.236. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1 \cdot x_2 = -12$. Wiedząc, że dla argumentu $\frac{1}{2}$ funkcja f przyjmuje największą wartość, równą $3\frac{1}{16}$, wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

3.237. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające dwa warunki: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=7$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 1$. Wiedząc, że do wykresu funkcji f należy punkt $A(-2, -6)$, wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

3.238. Ułóż równanie kwadratowe, którego rozwiązaniami są liczby x_1, x_2 spełniające warunki:

a) $x_1+x_2=2$ oraz $x_1^2+x_2^2=16$
b) $x_1+x_2=5$ oraz $(x_1-x_2)^2=37$
c) $x_1+x_2=-5$ oraz $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=10$
d) $x_1 \cdot x_2 = 4$ oraz $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2$
e) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{17}{4}$ oraz $4(x_1^2+x_2^2)=17$
f) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=x_1^2+x_2^2=7$.

3.239. Funkcja kwadratowa $y=x^2+x+c$ ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, które spełniają warunek $|x_1-x_2|=\sqrt{5}$. Oblicz c.

D **3.240.** Wykaż, że jeśli $b>1$, to funkcja kwadratowa $f(x)=\frac{1}{2}x^2+bx-b$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek: $|x_1-x_2|>2\sqrt{3}$.

D **3.241.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a funkcja kwadratowa $f(x)=-2x^2+ax+1$ ma dwa miejsca zerowe spełniające warunek: $|x_1|+|x_2|\geq\sqrt{2}$.

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

3.242. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania.

a) $(m-2)x^2+(m+5)x-m-1=0$
b) $(m+2)x^2-2x+m+2=0$

3.243. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, dla których równanie:

a) $8(k^2-1)x^2+(8k-8)x+1=0$ nie ma rozwiązań,
b) $(k-3)x^2+(k-2)x+1=0$ ma tylko jedno rozwiązanie,
c) $(k-1)x^2-(k+1)x+k+1=0$ ma rozwiązanie,
d) $(k^2-3k+2)x^2+3(k-2)x+4{,}5=0$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

3.244. Wyznacz liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru p, $p \in \mathbb{R}$. Napisz wzór funkcji g, która każdej rzeczywistej wartości parametru p przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania. Naszkicuj wykres funkcji g.

a) $(p-5)x^2 - 4px + p - 2 = 0$ b) $(2p-3)x^2 + 4px + p - 1 = 0$

3.245. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których dana nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x.

a) $-x^2 + (m+2)x + 8m - 1 < 0$ b) $2x^2 + (3+m)x + 2 \geq 0$

c) $(4-m)x^2 - 3x + m + 4 > 0$ d) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \leq 0$

3.246. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, dla których dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$, jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{kx^2 + 4kx + k - 3}$ b) $f(x) = \sqrt{(k^2 + k - 6)x^2 + (k-2)x + 1}$.

3.247. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, wartość funkcji $f(x) = (2k+1)x^2 + (k-1)x + 3k$ jest mniejsza od wartości funkcji $g(x) = (1-k)x + 3$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x?

D **3.248.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej k prawdziwa jest nierówność $2x^2 - kx + 2 > 3x - k^2$.

D **3.249.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 2mx + m^2 \geq 6x + 3m - 9$.

3.250. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste przeciwnych znaków.

a) $x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ b) $2x^2 - 3(a-1)x + 1 - a^2 = 0$

3.251. Wyznacz wszystkie wartości parametru c, $c \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania i oba są dodatnie.

a) $x^2 - 2cx + 4 - c^2 = 0$ b) $x^2 - (2c-4)x + c^2 - 2c - 3 = 0$

3.252. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania i oba są ujemne.

a) $x^2 + mx - m + 3 = 0$ b) $x^2 + 5mx + 4m^2 - 3m = 0$

3.253. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, dla których dane równanie ma dwa rozwiązania jednakowych znaków.

a) $x^2 + 2(k+4)x + k^2 - 2k = 0$ b) $2x^2 + (k-9)x + k^2 + 3k + 4 = 0$

3.254. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, różne rozwiązania x_1, x_2 równania $kx^2 - (k+1)x - 2k + 3 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = k + 1$?

3.255. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, suma odwrotności różnych rozwiązań równania $x^2 + kx - 16 = 0$ jest równa -4?

3.256. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbb{R}$, dla których różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 + 5px + 20p - 8 = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 = 400$.

3.257. Dla jakich wartości parametru p, $p \in \mathbb{R}$, równanie $x^2 + 2(p-1)x + p^2 - 4 = 0$ ma dwa rozwiązania, których suma kwadratów jest mniejsza od 12?

3.258. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, suma kwadratów różnych rozwiązań równania:

a) $x^2 + (m-2)x = m + 1$ jest najmniejsza?

b) $x^2 + m(m-x) = 3m + 2$ jest największa?

3.259. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 - (k-1)x + 1 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 2k^2 - k - 21$.

D **3.260.** Wykaż, że jeśli różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 - px + p + 8 = 0$ spełniają warunek $x_1x_2(x_1 + x_2) \geq x_1 + x_2 - 6$, to $p \in (-\infty, -6\rangle \cup (8, +\infty)$.

D **3.261.** Wykaż, że jeśli różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 + (2m-3)x + 2m + 5 = 0$ spełniają warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 3m^2 - 17m - 7$, to $m \in \left\langle -1, -\frac{1}{2} \right)$.

3.262. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbb{R}$, dla których kwadrat różnicy różnych rozwiązań równania $0{,}5x^2 + (p+1)x + 2 = 0$ jest nie większy od 84.

3.263. Dla jakich wartości parametru k różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 - (k+1)x + k = 0$ spełniają warunek $(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = 16$?

3.264. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 - 2(k-1)x + 2k + 1 = 0$ spełniają warunek $3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1) + 6 \leq x_1^2 + x_2^2$?

3.265. Dla jakich wartości parametru a, $a \in R$, każde z rozwiązań równania $x^2 - 6ax + 2 = 2a - 9a^2$ jest większe od 3?

3.266. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in R$, dla których każde z dwóch rozwiązań równania $x^2 - (2p - 3)x + p = 0$ jest mniejsze od p.

3.267. Dane jest równanie $x^2 + kx + k = 0$ z niewiadomą x i parametrem k, $k \in R$.

a) Rozwiąż to równanie w przypadku, gdy $k = -1\frac{1}{3}$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których wszystkie rozwiązania równania należą do przedziału $(-\infty, 2)$.

3.268. Dla jakich wartości parametru k, $k \in R$, funkcja kwadratowa $y = x^2 - 2x + k$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek: $7x_2 - 4x_1 = 47$?

3.269. Dla jakich wartości parametru a, $a \in R$, różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$ spełniają warunek $x_1 = 2x_2$?

3.270. Dane jest równanie $x^2 - mx + 2 = 0$ z niewiadomą x i parametrem m, $m \in R$.

a) Rozwiąż to równanie w przypadku, gdy $m = 2\sqrt{2}$.

b) Dla jakich wartości parametru m wszystkie rozwiązania tego równania należą do przedziału $\langle 0, 3\rangle$?

3.271. Dla jakich wartości parametru m, $m \in R$, rozwiązania x_1, x_2 równania $2x^2 - 2(2m + 1)x + m(m - 1) = 0$ spełniają warunek $x_1 < m < x_2$?

3.272. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in R$, dla których równanie $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa rozwiązania, z których jedno należy do przedziału $(0, 2)$, a drugie do przedziału $(3, 5)$.

3.273. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = (x - 3p)\cdot(x - p - 3)$, gdzie p jest parametrem, $p \in R$.

a) Dla $p = \frac{1}{3}$ rozwiąż nierówność $f(x) < 0$.

b) Dla jakich wartości parametru p funkcja f dla każdej liczby rzeczywistej x, należącej do przedziału $\langle 1, 3\rangle$, przyjmuje wartości ujemne?

3.274. Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji g, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + (m^2 - 1)x + 3$ w przedziale $\langle -1, 1\rangle$.

3.275. Napisz wzór funkcji g, która każdej liczbie rzeczywistej k przyporządkowuje najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + kx - k$ w przedziale $\langle 0, 2\rangle$.

3.276. Dla jakich wartości parametru m różne rozwiązania x_1, x_2 równania $x^2 + 2x + m - 1 = 0$ spełniają warunek $|x_1| + |x_2| \le 3$?

3.277. Dla jakich wartości parametru m, $m \in R$, różne rozwiązania x_1, x_2 równania $-x^2 + x + m - 4 = 0$ spełniają warunek $|x_1| + |x_2| > 2$?

3.278. Dla jakich wartości parametru m, $m \in R$, różne rozwiązania x_1, x_2 równania $5x^2 - mx + 1 = 0$ spełniają warunek $|x_1 - x_2| \ge 1$?

3.279. Dane jest równanie z niewiadomą x i parametrem m, $m \in R$. Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania w zależności od m.

a) $|3 + 2x - x^2| = m$

b) $|x - 3|\cdot|x - 1| = m$

c) $|x^2 - 4| = m^2 + 3$

d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2|x| = 3(m+1)$

e) $x^2 + 4|x| + 3 = m$

f) $2|x| - x^2 = k^2 - 2$

3.280. Dla jakich wartości parametru a, $a \in R$, dane równanie z niewiadomą x ma dwa rozwiązania?

a) $x\cdot|x - 1| = a + 1$

b) $|x^2 - 4| = a^2 + 1$

3.281. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in R$, dla których równanie $|x^2 + 6x + 8| = |m + 2|$ ma dwa rozwiązania i są one przeciwnych znaków.

3.282. Wyznacz wszystkie wartości parametru c, $c \in R$, dla których równanie $(1 - |x + 1|)^2 = c^2 - 2$ ma trzy rozwiązania.

3.283. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in R$, dla których zbiór rozwiązań nierówności $|1 - x^2| \le 3 - k$ zawiera się w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.

3.284. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in R$, dla których niepusty zbiór rozwiązań nierówności $|x - 1|\cdot|x - 5| \le a^2 - 4a$ zawiera się w przedziale $(0, 6)$.

3.285. Dla jakich wartości parametru a, $a \in R$, równanie $x^2 - (a + 1)|x| + 1 = 0$ ma cztery rozwiązania?

3.286. Dla jakich wartości parametru p, $p \in R$, równanie $(|x| - 2)^2 = p^2 - 3p$ ma cztery rozwiązania?

3.287. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in R$, dla których równanie $x^2 + 2(p-3)|x| = 1 - p^2$ ma trzy rozwiązania. Dla znalezionych wartości p podaj te rozwiązania.

3.288. Dla jakich wartości parametru m, $m \in R$, równanie $2x^2 - m|x| + m - 2 = 0$ ma dwa rozwiązania?

Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Wykresem funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych:

A. $(2, -3)$ B. $(-3, 0)$ C. $(1, -3)$ D. $(0, -3)$

2. Osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 8$ jest prosta o równaniu:

A. $x = 6$ B. $y = -6$ C. $x = 1{,}5$ D. $y = 6$

3. Funkcja kwadratowa $y = -2x(x-8)$ jest rosnąca w przedziale:

A. $\langle 4, +\infty)$ B. $(-\infty, 8\rangle$ C. $(-\infty, 4\rangle$ D. $\langle 8, +\infty)$

4. Wykres funkcji $y = 9 - 2(x+1)^2$ przecina oś OY w punkcie o rzędnej:

A. 11 B. 10 C. 7 D. 2

5. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $(3-x)(x+2) \geq x + 2$.

A. $(-\infty, 2\rangle$ B. $\langle -2, 2\rangle$ C. $\langle -2, +\infty)$ D. $\langle -2, 3\rangle$

6. Suma miejsc zerowych funkcji $y = (x-1)^2 - 16$ jest równa:

A. 2 B. 8 C. –2 D. –8

7. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $y = 3(x-2)(x+6)$ jest równa:

A. –48 B. –36 C. –30 D. –12

8. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: $\sqrt{2}$ oraz $-2\sqrt{2}$. Wówczas iloraz $\frac{f(1)}{f(2)}$ jest równy:

A. $\frac{1}{2} - 3\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

9. Średnia arytmetyczna miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = 2x^2 + bx + c$ jest równa 1, a zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle 10, +\infty)$. Zatem:

A. $b + c = 8$ B. $b + c = -8$ C. $b + c = 16$ D. $b + c = -16$

10. Wykres funkcji $y = -x^2 - 5x$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OX o 2 jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji f. Zatem funkcję f opisuje wzór:

A. $f(x) = -x^2 - x + 6$ B. $f(x) = -x^2 - x - 14$
C. $f(x) = -x^2 - 9x - 14$ D. $f(x) = -x^2 - x - 4$.

11. Wyróżnik funkcji kwadratowej jest równy 16, a współrzędne wierzchołka wykresu tej funkcji wynoszą $(-1, 4)$. Wskaż miejsca zerowe tej funkcji.

A. –1 i 4 B. 1 i –3 C. –1 i 3 D. 1 i –4

12. Jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest liczba 2, a do wykresu tej funkcji należy punkt $P(-1, 18)$. Zatem współczynnik a we wzorze funkcji f jest równy:

A. $-\frac{1}{2}$ B. 2 C. –2 D. $\frac{1}{2}$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

13. Rozwiąż równania:

a) $-2(x+10)^2 = 0$ b) $\frac{x \cdot (x-1)}{2} = \frac{x+3}{5}$

c) $(2x^2 - 3)(2x^2 + 3) = 5x^2$ d) $(x^2 - 3x)^2 = 4(x^2 - 3x)$

14. Rozwiąż nierówność:

a) $7 - 2(x-2)^2 \geq 5x$ b) $2x^2 + 9 \leq 6\sqrt{2}x$

c) $3x(3x-4) < 4(4-3x)$ d) $\frac{x - \frac{x^2+2x}{3}}{2} < x + 2$

15. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - 4x + 5$ w przedziale $\langle -2, 3\rangle$.

16. Dany jest wzór funkcji kwadratowej $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 4$.

a) Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

c) Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = x + 2$.

17. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 - 6x + c$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne $(-1, 0)$.

a) Oblicz a i c.

b) Podaj zbiór wartości funkcji, opisanej wzorem $y = 8 - f(x)$.

c) Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe, niż funkcja $g(x) = -2x - 2$.

18. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: -3 i 1. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej $-1\frac{1}{2}$.

a) Wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

b) Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.

c) Jakie miejsca zerowe ma funkcja $y = f(-x) + 1\frac{1}{2}$?

19. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$. Największa wartość funkcji f jest równa 1.

a) Podaj równanie osi symetrii wykresu funkcji f.

b) Oblicz a, b, c.

c) Napisz w postaci ogólnej wzór funkcji g, której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji f o 3 jednostki w lewo i 4 jednostki do góry.

20. Ojciec i córka mają razem 100 lat. 15 lat temu iloczyn liczby lat córki i ojca był równy 1029. Ile lat ma obecnie ojciec, a ile córka?

21. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 8, zaś suma kwadratów jej cyfr jest równa 30. Jeśli w liczbie zamienimy cyfry skrajne, to otrzymana liczba będzie o 396 większa od początkowej. Wyznacz tę liczbę trzycyfrową.

22. Na spotkaniu towarzyskim każdy uczestnik spotkania przywitał się z każdym z pozostałych uczestników uściskiem dłoni. Ile co najmniej osób brało udział w tym spotkaniu, jeżeli wymieniono więcej niż 45 uścisków dłoni?

23. Długości przekątnych rombu wyrażają się liczbami pierwszymi, różniącymi się o 2. Wiedząc, że pole tego rombu jest mniejsze od $17\frac{1}{2}$, oblicz jego obwód.

24. W małym zakładzie krawieckim są szyte koszulki, które sprzedaje się do hurtowni po 86 zł za sztukę. Związek między kosztem produkcji $K(x)$, a liczbą x uszytych koszulek w ciągu dnia wyraża wzór $K(x) = 4x^2 - 2x + 84$. Zakład może uszyć dziennie maksymalnie 18 koszulek.

a) Oblicz, ile co najmniej koszulek dziennie powinien szyć ten zakład, aby osiągnął zysk z ich sprzedaży.

b) Oblicz, ile koszulek dziennie powinien szyć ten zakład, aby jego dzienny zysk był największy. Jaka jest wartość największego dziennego zysku?

25. Drut długości 2 m trzeba podzielić na dwa kawałki: z jednego powstanie ramka kwadratowa, a z drugiego ramka prostokątna, której długości boków pozostają w stosunku 2 : 3. Jaką długość powinien mieć każdy z tych kawałków drutu, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

D **26.** Wykaż, że jeśli wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2bx - 8$ znajduje się w układzie współrzędnych pod osią OX, to $b \in (-2, 2)$.

D **27.** Wykaż, że jeśli zbiór wartości funkcji kwadratowej $y = -x^2 + 2kx - 3$ jest przedziałem $(-\infty, 1\rangle$, to $k = -2$ lub $k = 2$.

D **28.** Wykaż, że jeśli $a - 2b = 3$, to $a^2 + b^2 \geq \frac{9}{5}$.

D **29.** Wykaż, że równanie $2x^2 - (k + 1)x + 2 = 0$ ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy $k \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 3, +\infty)$.

D **30.** Wykaż, że nierówność $2x^2 + (k + 3)x + 8 > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x tylko wtedy, gdy $k \in (-11, 5)$.

31. Rozwiąż równanie:

a) $\left||x^2 - 2x| + 1\right| = 4$

b) $|x^2 - x - 3| + x + 1 = 0$

c) $|-x^2 + x - 1| = |2x - 3 - x^2|$

d) $|x^2 - 4| - |9 - x^2| = 5$

32. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność $|x^2 - 5|x| + 2| > 2$.

33. Rozwiąż nierówność:

a) $(|x|-5)(|x|-7) \geq 0$ b) $|2x^2-6x| \leq x-3$

34. Rozwiąż:

a) równanie $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}=4\sqrt{x}$ b) nierówność $\sqrt{2x^2+x-6} \geq 8-3x$.

35. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające dwa warunki: $x_1+x_2=5$ oraz $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{5}{6}$. Wiedząc, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -\frac{1}{12}, +\infty \right)$, wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

36. Rozwiązaniami równania $x^2-(p^2+q^2)x+p+q=0$ z niewiadomą x są liczby $5+\sqrt{23}$ oraz $5-\sqrt{23}$. Oblicz p i q.

37. Funkcja kwadratowa $f(x)=x^2-5x+c$ ma dwa miejsca zerowe, będące liczbami naturalnymi. Oblicz c. Podaj wszystkie możliwe rozwiązania. Dla wyznaczonej liczby c podaj miejsca zerowe funkcji f.

D **38.** Wykaż, że jeśli liczby x_1, x_2 są rozwiązaniami równania $x^2-x-3=0$, to $x_1^4+x_2^4=31$.

39. Dane jest równanie $(1-k)x^2+(k-1)x+(k+1)=0$ z niewiadomą x i parametrem k, $k \in \mathbb{R}$. Napisz wzór funkcji f, która każdej liczbie rzeczywistej k przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

40. Na podstawie wykresu funkcji $f(x)=x\cdot|x-4|$ wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x\cdot|x-4|=m^2-1$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

41. Dla jakich wartości parametru m suma dwóch różnych rozwiązań równania $x^2-2m(x-1)-1=0$ jest nie mniejsza od sumy kwadratów tych rozwiązań?

42. Dla jakich wartości parametru p funkcja kwadratowa $y=x^2-px+3+p$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1=1+x_2$?

43. Dla jakich wartości parametru p równanie $2x^2-(p+1)x+p+1=0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1-x_2|=1{,}5$?

44. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla których każde z rozwiązań równania $x^2-(2+a)x+a^2=0$ jest mniejsze od $2a$.

45. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, dla których funkcja kwadratowa $f(x)=x^2-4(k+1)x+2k(k-1)$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $x_1<k<x_2$.

46. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla których dziedziną funkcji $y=\sqrt{(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2}$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

47. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność $(a-1)x^2+(2-2a)x+a-2>(2-3a)x-2$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x.

48. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^2+p=4|x|-1$ ma dwa rozwiązania.

4. Geometria płaska – okręgi i koła

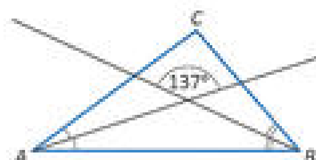
Powtórzenie wiadomości z geometrii z klasy 1.

4.1. Wyznacz miary dwóch kątów przyległych, jeśli jeden z nich jest cztery razy większy od drugiego.

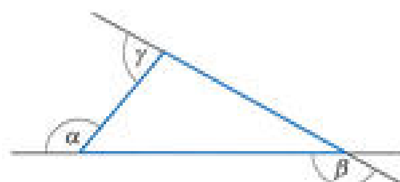
4.2. Punkt O jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów CAB i ABC w trójkącie ABC. Wyznacz miarę kąta wklęsłego AOB, jeśli:

a) $|\sphericalangle BAC|+|\sphericalangle ABC|=130°$ b) $|\sphericalangle ACB|=100°$.

4.3. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B. Kąt rozwarty przecięcia się tych dwusiecznych jest równy 137°. Oblicz miarę kąta ACB.

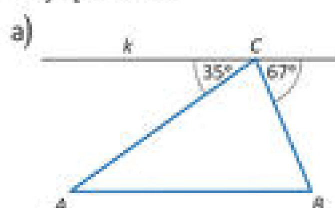


4.4. Na rysunku obok zaznaczone są kąty zewnętrzne trójkąta α, β, γ. Wiedząc że $\alpha+\gamma=217°$, oblicz β.

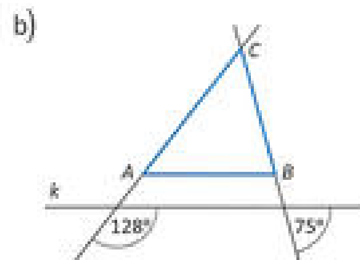


4.5. Dany jest trójkąt ABC oraz prosta k, równoległa do podstawy AB i przechodząca przez wierzchołek C. Na podstawie danych na rysunku poniżej, wyznacz kąty trójkąta ABC.

a)



b)



4.6. Dany jest kąt ostry BAC, $|\sphericalangle BAC|=39°$, oraz punkt P, leżący na zewnątrz tego kąta. Z punktu P poprowadzono dwie proste: jedną równoległą do ramienia AB, a drugą prostopadłą do ramienia AC. Oblicz miarę kąta ostrego przecięcia się tych prostych.

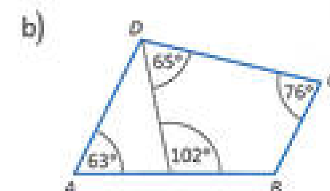
4.7. Wykaż, że w dowolnym trapezie dwusieczne kątów przy tym samym ramieniu są do siebie prostopadłe.

4.8. Korzystając z danych na rysunku poniżej wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

a)

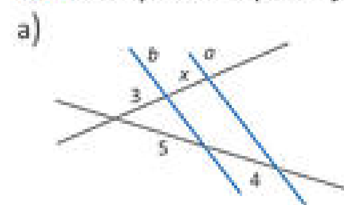


b)

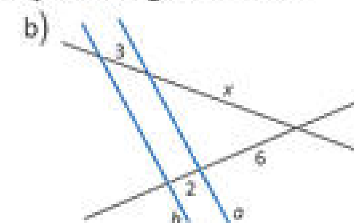


4.9. Na rysunkach poniżej proste a i b są równoległe. Oblicz x.

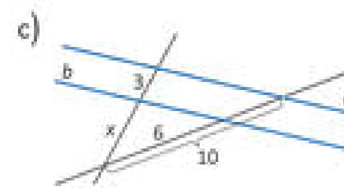
a)



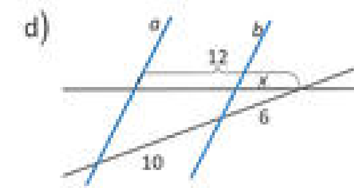
b)



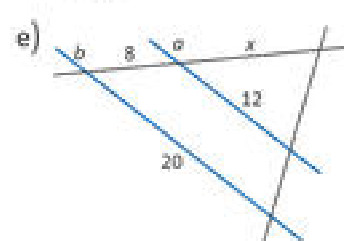
c)



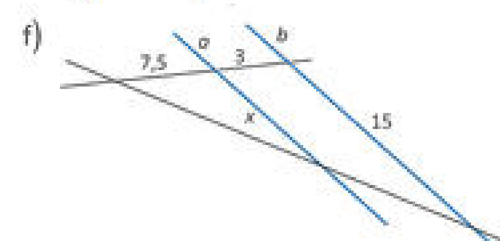
d)



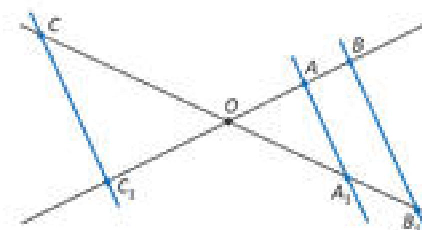
e)



f)



4.10. Proste AB i A_1B_1 przecinają się w punkcie O. Proste te przecięto prostymi równoległymi AA_1, BB_1 i CC_1 – jak na rysunku obok.



Oblicz:

a) $|CC_1|$, jeśli $|C_1O|=4$ cm, $|OA|=3$ cm, $|AA_1|=2$ cm

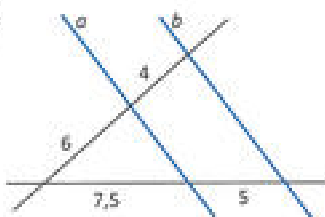
b) $|OC_1|$, jeśli $|OA_1|=1{,}8$ dm, $|AC_1|=11{,}2$ dm, $|OC|=5{,}4$ dm

c) $|OB|$, jeśli $|CC_1|=4$ dm, $|BB_1|=56$ cm, $|C_1B|=12$ dm

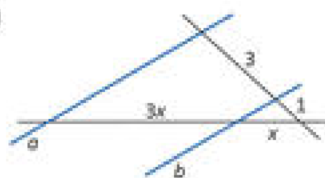
d) $|CA_1|$, jeśli $|AA_1|=2$ cm, $|BB_1|=5$ cm, $|A_1B_1|=4{,}5$ cm, $|CC_1|=4$ cm.

4.11. Czy na rysunku poniżej proste a i b są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

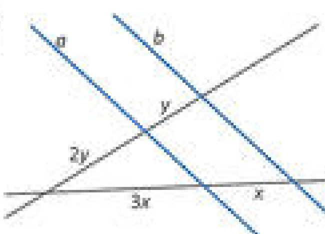
a)



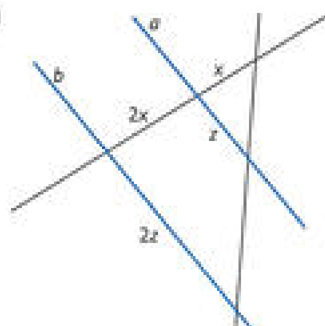
b)



c)



d)



4.12. Wyznacz wszystkie liczby a, $a > 0$, dla których istnieje trójkąt o bokach mających długość:

a) a, 4, $8 - a$ b) a, $a + 3$, $a + 6$ c) $2a$, 7, $11 - a$

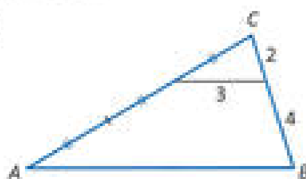
4.13. Dwa boki trójkąta mają długość 4 i 9. Długość c trzeciego boku wyraża się liczbą pierwszą.

a) Oblicz c. Podaj wszystkie możliwe rozwiązania.

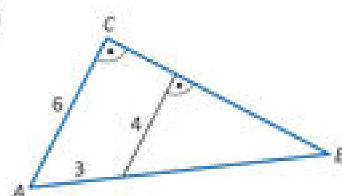
D b) Wykaż, że dla każdej liczby c, znalezionej w punkcie a) trójkąt jest rozwartokątny.

4.14. Na podstawie danych na rysunku poniżej, oblicz długość podstawy AB trójkąta ABC.

a)

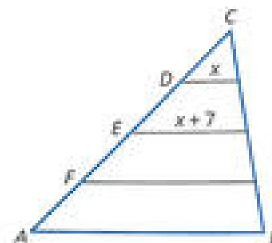


b)

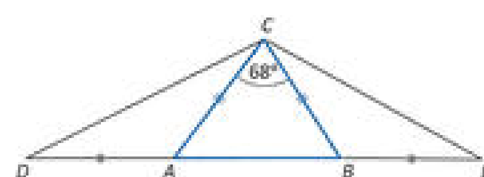


4.15. Długości boków trójkąta ABC pozostają w stosunku 2 : 3 : 4. Środki boków tego trójkąta wyznaczają trójkąt, którego obwód jest równy 13,5 cm. Oblicz długości boków trójkąta ABC.

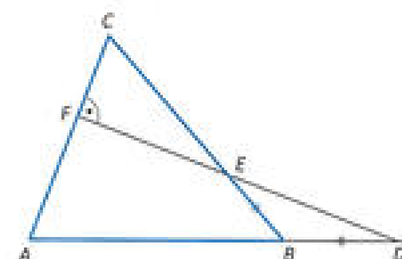
4.16. Punkty D, E, F dzielą bok AC trójkąta ABC na cztery odcinki równej długości. Przez punkty D, E, F poprowadzono odcinki równoległe do boku AB, których drugi koniec należy do boku BC. Wiedząc, że najkrótszy z tych odcinków jest krótszy od kolejnego odcinka o 7 cm, oblicz długość boku AB i długości równoległych odcinków.



4.17. W trójkącie równoramiennym ABC kąt ACB jest równy 68°. Na prostej AB zaznaczono punkty D i E w taki sposób, że $|DA| = |AC|$ oraz $|BC| = |BE|$. Oblicz kąty trójkąta CDE.



D **4.18.** Punkt D leży na przedłużeniu boku AB trójkąta ABC poza punkt B. Z punktu D poprowadzono prostą prostopadłą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Wykaż, że jeśli $|BD| = |BE|$, to trójkąt ABC jest równoramienny



4.19. Wysokość trójkąta równobocznego jest o 2 krótsza od boku.

a) Oblicz długość boku tego trójkąta. Wynik przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, $c \in \mathbf{N}_+$.

b) Jaki obwód ma trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków danego trójkąta?

4.20. W trójkącie prostokątnym równoramiennym najkrótsza wysokość ma długość 2 cm.

a) Oblicz długości boków tego trójkąta.

c) Punkt M należy do przeciwprostokątnej tego trójkąta i dzieli ją w stosunku 1 : 3. Oblicz odległości punktu M od przyprostokątnych.

4.21. Kąty α, β, γ trójkąta różnią się kolejno o 30°.

D a) Wykaż, że trójkąt jest prostokątny.

b) Oblicz obwód tego trójkąta wiedząc, że różnica długości najdłuższego i najkrótszego boku tego trójkąta jest równa 4 cm. Wynik zaokrąglij do pierwszego miejsca po przecinku.

4.22. Boki trójkąta mają długość: 20 cm, 16 cm, 12 cm.

D a) Wykaż, że trójkąt jest prostokątny.

b) Oblicz sumę długości wszystkich wysokości tego trójkąta.

4.23. Stosunek długości krótszych boków trójkąta prostokątnego jest równy 3 : 4. Wiedząc, że obwód tego trójkąta wynosi 36 cm, oblicz:

a) długości boków tego trójkąta,

b) długość środkowej trójkąta, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

4.24. Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm.

a) Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

b) Oblicz długości trzech wysokości tego trójkąta.

4.25. W trójkącie ABC boki mają długość: $|AB| = 18$ cm, $|BC| = |AC| = 15$ cm. Oblicz:

a) wysokość CD tego trójkąta,

b) długość środkowej AE,

c) długość odcinka DE.

4.26. Oblicz długości odcinków, na jakie środek ciężkości trójkąta dzieli środkową tego trójkąta poprowadzoną na podstawę, jeśli:

a) trójkąt jest równoboczny, a jego obwód jest równy 18,

b) trójkąt jest prostokątny równoramienny, a jego ramiona mają długość 3.

4.27. Boki trójkąta mają długość: 9 cm, 12 cm, 15 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta:

a) od dwóch jego krótszych boków,

b) od wierzchołków tego trójkąta.

4.28. Oblicz długości środkowych trójkąta, którego boki mają długość: 16 cm, 17 cm, 17 cm.

D **4.29.** W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Punkt E jest środkiem odcinka AD. Półprosta $CE^{\to}$ przecina bok AB w punkcie P. Wykaż, że $|PB| = 2|AP|$.

D **4.30.** W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Wykaż, że jeśli suma miar kątów DAC i ACB jest równa mierze kąta ADC, to trójkąt DBP jest równoramienny.

D **4.31.** Trójkąt ABC jest równoboczny, a jego bok ma długość a, $a > 1$. Punkt D należy do boku AC oraz $|AD| = 1$. Na przedłużeniu boku BC poza punkt C leży punkt P. Wykaż, że jeśli $|CP| = 1$, to trójkąt DBP jest równoramienny.

4.32. Boki trójkąta ABC mają długość: 8 cm, 10 cm, 12 cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód trójkąta $A_1B_1C_1$.

4.33. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali 1,25. O ile procent obwód trójkąta ABC jest mniejszy od obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$?

4.34. Boki trójkąta ABC mają długość: $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC, a jego boki mają odpowiednio długość: $|B_1C_1| = a + 4$, $|A_1C_1| = b + 6$, $|A_1B_1| = c + 8$.

D a) Wykaż, że $a : b : c = 2 : 3 : 4$.

b) Wiedząc dodatkowo, że obwód trójkąta ABC jest równy 27 cm, oblicz skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC.

4.35. Boki trapezu $ABCD$, $AB \parallel DC$, mają długość: $|AB| = 21$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|DC| = 14$ cm, $|AD| = 5$ cm. Proste AD i BC przecinają się w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta ABP.

4.36. Podstawy trapezu mają długość 4 cm i 12 cm, a jego przekątne mają długość 10 cm oraz 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie punkt przecięcia przekątnych dzieli te przekątne.

4.37. W trójkącie równoramiennym boki mają długość: 18 cm, 15 cm, 15 cm.

a) Oblicz odległości środka wysokości poprowadzonej na podstawę od boków tego trójkąta.

b) Jaka jest odległość spodka tej wysokości od ramion trójkąta?

4.38. Najkrótsza wysokość trójkąta prostokątnego jest równa 8 cm, a najdłuższa wynosi $13\frac{1}{3}$ cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

4.39. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki, których długości pozostają w stosunku 9 : 16. Wiedząc, że obwód trójkąta jest równy 30 cm, oblicz długości przyprostokątnych.

4.40. W trójkącie ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| < |BC|$, zaznaczono środek ciężkości S i spodek D wysokości CD.

D a) Wykaż, że jeśli $|AD| = 3$ oraz $|BD| = 6$, to odcinek DS jest równoległy do boku AC, a jego długość jest równa $\sqrt{3}$.

b) Czy odcinek DS byłby równoległy do boku AC, gdyby $|AD| = 1$ oraz $|DB| = 4$? Odpowiedź uzasadnij.

D **4.41.** W trójkącie ABC bok AB jest najdłuższy. Na boku AB zaznaczamy punkty C_1 i C_2 w taki sposób, że $|AC_1| = |AC|$ oraz $|BC_2| = |BC|$. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle C_2CC_1| = 40°$, to $|\sphericalangle ACB| = 100°$.

D **4.42.** W trójkącie prostokątnym ABC, $|\sphericalangle C| = 90°$, poprowadzono wysokość CD. Wykaż, że:

a) $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$ b) $|BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$

D **4.43.** W trójkącie prostokątnym ABC, symetralna przeciwprostokątnej BC przecina przyprostokątną AB w punkcie P. Wykaż, że jeśli $|AP| : |PB| = 1 : 3$, to $|AC| : |BC| = 1 : \sqrt{3}$.

D **4.44.** W trójkącie ABC poprowadzono środkowe BD i CE, które przecięły się w punkcie S. Wykaż, że:

a) półprosta $AS^{\rightarrow}$ dzieli odcinek DE na połowy,

b) prosta równoległa do odcinka DE i przechodząca przez punkt S dzieli boki AB i AC w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka A,

c) odległość punktu S od dowolnego boku jest równa $\frac{1}{3}$ wysokości poprowadzonej na ten bok.

D **4.45.** W trapezie $ABCD$ podstawy AB i DC mają odpowiednio długość a i b, gdzie $a > b$. Ramiona AD i BC przedłużono do punktu P. Punkty E i F są odpowiednio środkami ramion AD i BC.

a) Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wykaż, że $ED \parallel AB$.

b) Korzystając z wniosku z twierdzenia Talesa wykaż, że $|ED| = \frac{a+b}{2}$.

c) Niech przekątne AC i BD przecinają odcinek ED odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że punkty K i L są środkami tych przekątnych oraz $|KL| = \frac{a-b}{2}$.

Okrąg. Położenie prostej i okręgu

4.46. Naszkicuj okrąg i zaznacz na nim punkty A, B i C.

a) Ile cięciw i ile łuków wyznaczają te punkty? Wskaż te cięciwy i łuki.

b) Ile cięciw i ile łuków wyznaczają cztery punkty położone na okręgu?

4.47. W kole poprowadzono średnicę AB i cięciwę AC. Wiedząc, że $BC \perp AC$ i $|BC| = 7$ cm, oblicz odległość cięciwy AC od środka koła.

4.48. Odcinek AB jest cięciwą okręgu o promieniu 25 cm. Wiedząc, że $|AB| = 48$ cm, oblicz odległość tej cięciwy od środka okręgu.

4.49. Promień okręgu jest równy 17 cm. Oblicz długość cięciwy tego okręgu, która znajduje się w odległości 8 cm od środka okręgu.

4.50. Cięciwa CD okręgu jest równoległa do średnicy AB, a odległość między nimi jest równa 5 cm. Wiedząc że różnica długości tych cięciw jest równa 2 cm, oblicz długość tego okręgu.

4.51. Cięciwa CD okręgu jest prostopadła do średnicy AB i przecina ją w punkcie P w stosunku 9 : 1. Wiedząc, że odległość punktu P od środka okręgu jest równa 4 cm, oblicz:

a) długość okręgu b) długość cięciwy CD.

4.52. Wyraź w procentach (z dokładnością do 1%), jaką część okręgu stanowi łuk okręgu o promieniu r, jeśli długość łuku jest równa d.

a) $r = 3$ cm, $d = \pi$ cm b) $r = 5$ cm, $d = 20$ cm

c) $r = \pi$ cm, $d = \pi^2$ cm d) $r = 0{,}25\pi$ dm, $d = 6$ cm

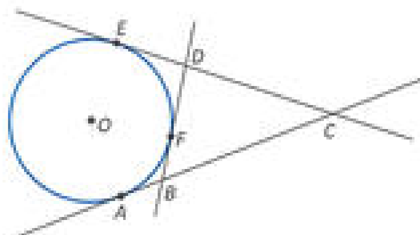
e) $r = \sqrt{3}$ dm, $d = \sqrt{12}\pi$ dm f) $r = 0{,}4$ m, $d = \sqrt{5}\pi$ dm

4.53. Dany jest promień r okręgu o i odległość d środka okręgu o od prostej k. Ustal położenie prostej k oraz okręgu o.

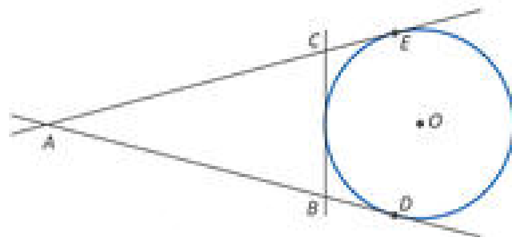
a) $r = 3$, $d = 2\sqrt{3}$ b) $r = \pi$, $d = 9^{0,5}$

c) $r = 7$, $d = \sqrt{4^2 + 3^2}$ d) $r = \log_2 8$, $d = 3$

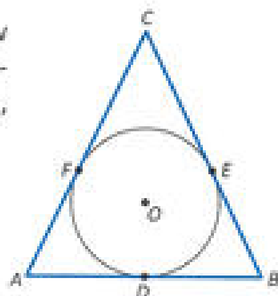
4.54. Wskaż na rysunku obok trzy pary odcinków równej długości wiedząc, że proste AC, EC, BD są styczne do okręgu odpowiednio w punktach A, E, F.



4.55. Proste AE, AD i BC są styczne do okręgu. Wiedząc, że $|AD| = 17$ cm, oblicz obwód trójkąta ABC.



4.56. Okrąg na rysunku obok jest styczny do wszystkich boków trójkąta ABC, w którym $|AC| = |BC|$, odpowiednio w punktach D, E, F. Wiedząc, że $|AB| = 15$ cm oraz $|BC| = 19{,}5$ cm, oblicz długość odcinka FC.



4.57. Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu jest równa α. Pod jakim kątem widać ten okrąg z punktu przecięcia stycznych do okręgu, poprowadzonych z końców tych promieni, jeśli:

a) $\alpha = 45°$ b) $\alpha = 60°$ c) $\alpha = 100°$ d) $\alpha = 141°$?

4.58. Z punktu A poprowadzono dwie styczne do okręgu o środku O i promieniu 3 cm. Odcinek AO ma długość 9 cm i przecina okrąg w punkcie P. Oblicz odległość punktu P od tych stycznych.

D **4.59.** Z punktu A poprowadzono dwie styczne do okręgu o środku O i promieniu r. Półprosta $AO^{\rightarrow}$ przecina okrąg w dwóch punktach P i Q. Wykaż, że jeśli odległość punktu Q od poprowadzonych stycznych jest dwa razy większa niż odległość punktu P od tych stycznych, to $r = \frac{1}{2}|AP|$.

4.60. Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce A, B średnicy tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i o 15 cm. Oblicz promień tego okręgu.

4.61. Dany jest okrąg o promieniu r i prosta, której odległość od środka okręgu jest równa d. Zbadaj położenie prostej k i okręgu o w zależności od a.

a) $r = 4$, $d = a - 3$ b) $r = a$, $d = 8 - a$

c) $r = -a$, $d = 6 + a$ d) $r = a - 1$, $d = a + 1$

Wzajemne położenie dwóch okręgów

4.62. Określ wzajemne położenie okręgów $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$, jeśli $|AB| = 8$ oraz:

a) $r_1 = 1$, $r_2 = 9$ b) $r_1 = 3$, $r_2 = 5$

c) $r_1 = \sqrt{5}$, $r_2 = 3\sqrt{5}$ d) $r_1 = 5$, $r_2 = 13$

e) $r_1 = \sqrt{8}$, $r_2 = 11$ f) $r_1 = 4 - \sqrt{5}$, $r_2 = 4 + \sqrt{2}$

4.63. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Odległość między ich środkami wynosi 12 cm. Wyznacz promienie tych okręgów, wiedząc, że:

a) jeden z nich jest o 2 cm dłuższy od drugiego,

b) jeden z nich jest trzy razy krótszy od drugiego.

4.64. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie. Odległość między ich środkami jest równa 3 cm. Wyznacz promienie tych okręgów, jeśli:

a) jeden z nich jest dwa razy krótszy od drugiego,

b) suma długości promieni jest równa 17 cm.

4.65. Wyznacz promienie okręgów wiedząc że, gdyby te okręgi były styczne zewnętrznie, to odległość między ich środkami byłaby równa 15 cm; a gdyby te okręgi były styczne wewnętrznie, to odległość między ich środkami byłaby równa 3 cm. Wyznacz promienie tych okręgów.

4.66. Trzy okręgi o promieniu r są styczne zewnętrznie, każdy do dwóch pozostałych. Wyznacz długości boków i miary kątów trójkąta, utworzonego przez punkty styczności.

4.67. Dwa okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ są styczne zewnętrznie do siebie i oba są styczne wewnętrznie do okręgu $o(C, r_3)$. Obwód trójkąta ABC wynosi 25 cm. Oblicz r_3.

4.68. Dane są dwa okręg współśrodkowe. Cięciwa większego okręgu jest styczna do mniejszego okręgu, a jej długość jest równa 30 cm. Oblicz promienie tych okręgów wiedząc, że różnią się o 9 cm.

4.69. Dane są dwa okręgi $o(A, r_1)$, $o(B, r_2)$ takie, że:

a) $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $|AB| = k$

b) $r_1 = k$, $r_2 = k - 1$, $|AB| = 5$

c) $r_1 = 3$, $r_2 = 2k$, $|AB| = 4$

d) $r_1 = 5 - k$, $r_2 = k + 1$, $|AB| = 2$.

Określ położenie okręgów w zależności od wartości parametru k.

4.70. Dane są dwa okręgi $o(A, 3)$ oraz $o(B, m - 4)$. Odległość między ich środkami jest równa 7. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których te okręgi mają:

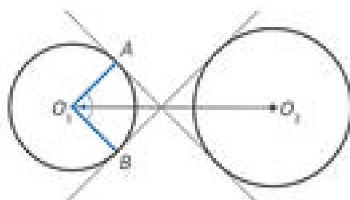
a) jeden punkt wspólny b) dwa punkty wspólne.

4.71. Odległość między środkami dwóch okręgów jest równa 9, a promienie tych okręgów są równe: $5 - a$ oraz $2a$. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których oba okręgi mają co najmniej jeden punkt wspólny.

4.72. Dwa okręgi o promieniach równych 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie. Dwie proste, z których każda jest styczną zewnętrzną obu okręgów, przecinają się w punkcie A. Oblicz odległość punktu A od środka mniejszego okręgu.

4.73. Dane są dwa okręgi: $o(A, 8)$ i $o(B, 12)$. Odcinek AB ma długość 25 i przecina się ze styczną wewnętrzną tych dwóch okręgów w punkcie C. Oblicz odległość punktu C od punktu B.

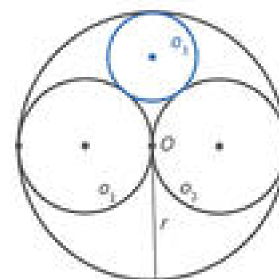
4.74. Dwa okręgi $o(O_1, 1)$ i $o(O_2, 2)$ są rozłączne zewnętrznie. Punkty A i B są punktami styczności okręgu o środku O_1 z dwiema stycznymi wewnętrznymi obu okręgów. Wiedząc, że $O_1B \perp O_1A$, oblicz $|O_1O_2|$.



4.75. Dwa okręgi o promieniach równych 5 i 8 są styczne zewnętrznie w punkcie P. Prosta k jest styczną zewnętrzną obu okręgów odpowiednio w punktach A i B. Prosta l jest styczną wewnętrzną obu okręgów i przecina się z prostą k w punkcie C. Oblicz:

a) długość odcinka AB b) długość odcinka CP.

D 4.76. Na rysunku obok dwa przystające okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie O i jednocześnie styczne wewnętrznie do okręgu $o(O, r)$. Wykaż, że okrąg o_3, styczny zewnętrznie do okręgów o_1, o_2 i jednocześnie styczny wewnętrznie do okręgu $o(O, r)$, ma promień równy $\frac{r}{3}$.

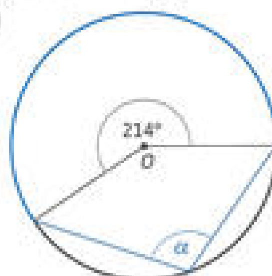


D 4.77. Przez punkt wspólny dwóch przecinających się okręgów o środkach O_1 i O_2 poprowadzono sieczną równoległą do prostej O_1O_2. Przecięła ona jeden okrąg w punkcie A, natomiast drugi – w punkcie B. Wykaż, że $|O_1O_2| = \frac{1}{2}|AB|$.

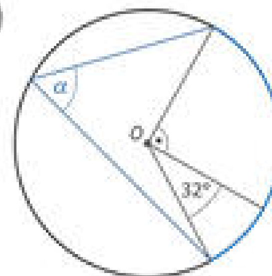
Koła i kąty

4.78. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Korzystając z danych na rysunku, wyznacz miarę kąta α.

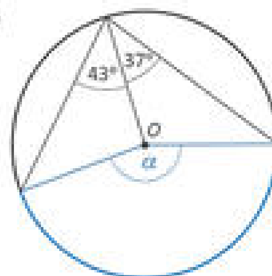
a)



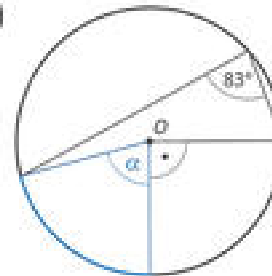
b)



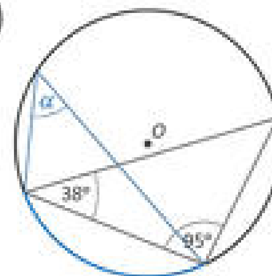
c)



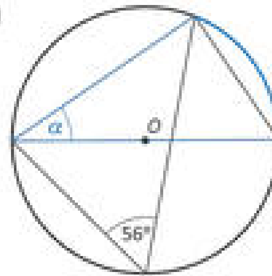
d)



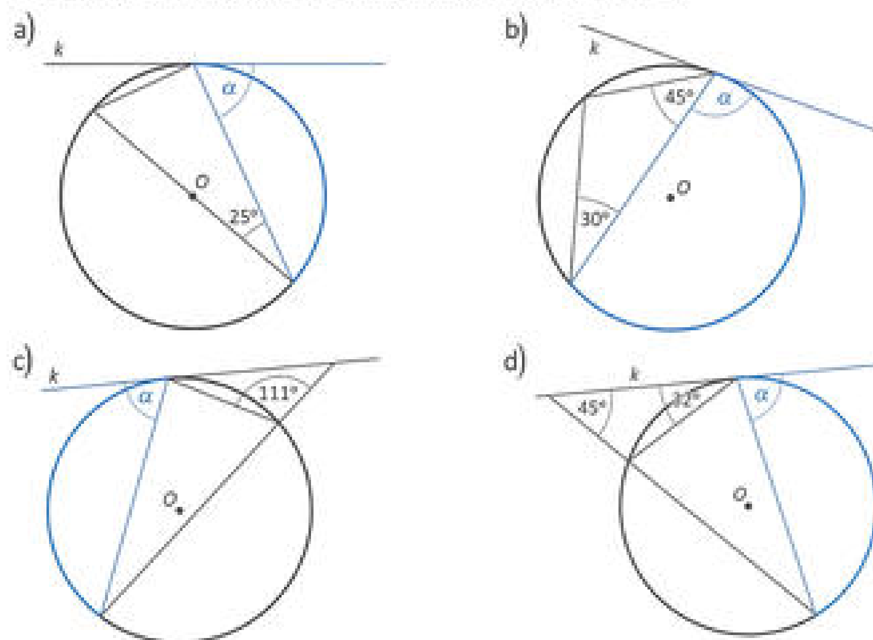
e)



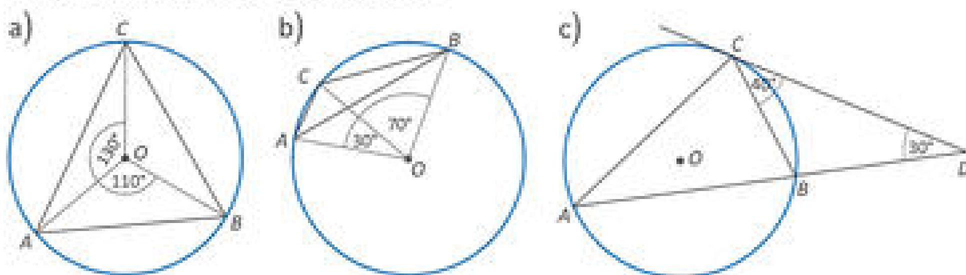
f)



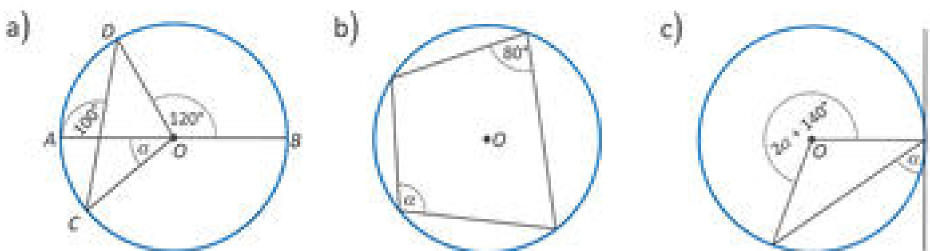
4.79. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i prosta k styczna do tego okręgu. Korzystając z danych na rysunku, wyznacz miarę kąta α.



4.80. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Korzystając z danych na rysunku, wyznacz miary kątów trójkąta ABC.



4.81. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Korzystając z danych na rysunku, oblicz α.



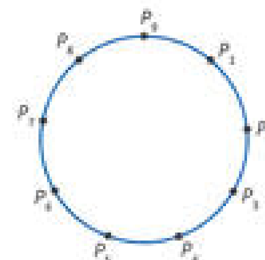
4.82. Oblicz miarę kąta środkowego, opartego na łuku okręgu o promieniu r, jeśli długość tego łuku jest równa d.

a) $r = 2,\ d = \pi$ b) $r = 3,\ d = 2\pi$ c) $r = 4,\ d = 5\pi$
d) $r = 5,\ d = 3\pi$ e) $r = 6,\ d = 6$ f) $r = 8,\ d = 40$

4.83. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu r. Oblicz długość łuku, na którym jest oparty kąt środkowy α w tym okręgu, jeśli:

a) $r = 15,\ \alpha = 72°$ b) $r = 10,\ \alpha = 216°$ c) $r = 4,\ \alpha = 135°$
d) $r = 28,\ \alpha = 30°$ e) $r = 13,\ \alpha = 270°$

4.84. Punkty $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ należą do okręgu i dzielą okrąg w danej kolejności na dziewięć łuków równej długości. Oblicz:



a) $|\sphericalangle P_6P_3P_5|$ b) $|\sphericalangle P_8P_5P_3|$
c) $|\sphericalangle P_7P_9P_1|$ d) $|\sphericalangle P_2P_3P_4|$.

4.85. W okręgu o promieniu r kreślimy średnicę AB oraz taką cięciwę AC, że $|AC| = r$. Jaką częścią okręgu jest łuk CAB?

4.86. Punkty A, B, C należą do okręgu. Wiedząc, że kąty trójkąta ABC są równe: $|\sphericalangle A| = 30°$, $|\sphericalangle B| = 45°$, $|\sphericalangle C| = 105°$, oblicz stosunek długości łuków, na jakie punkty A, B, C podzieliły okrąg.

4.87. Punkty A, B, C dzielą okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wynosi 5 : 6 : 7. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

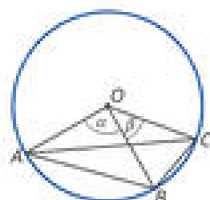
D **4.88.** Cięciwy AB i CD są różnymi średnicami jednego okręgu. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

D **4.89.** Wewnątrz równoległoboku narysowano dwa półokręgi: średnicą jednego jest krótszy bok, a średnicą drugiego – dłuższy bok równoległoboku. Wykaż, że punkt przecięcia tych półokręgów różny od wierzchołka równoległoboku należy do jednej z przekątnych tego równoległoboku.

D **4.90.** Dwa okręgi przecinają się w punktach P i Q. Poprowadzono średnicę PA w pierwszym okręgu oraz średnicę PB w drugim okręgu. Wykaż, że punkty A, Q, B są współliniowe.

D **4.91.** Cięciwa CD okręgu jest równoległa do średnicy AB. Wykaż, że różnica miar kątów ACD i CDA jest równa $90°$.

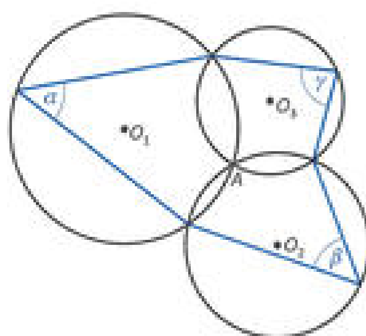
D **4.92.** Na rysunku obok dany jest okrąg o środku w punkcie O oraz kąty środkowe: α i β. Wykaż, że jeśli $\alpha = 80°$ i $\beta = 50°$, to $OC \parallel AB$.



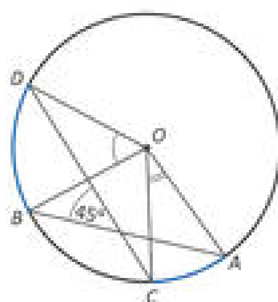
D **4.93.** Dwa okręgi o równych promieniach przecinają się w punktach A i B w taki sposób, że jeden przechodzi przez środek drugiego. Przez punkt A poprowadzono sieczną tych okręgów, która przecięła okręgi w punktach C i D. Wykaż, że punkty B, C, D są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

D **4.94.** Dane są dwa kąty wpisane, oparte na tym samym łuku. Wykaż, że dwusieczne tych kątów przecinają się w punkcie należącym do okręgu.

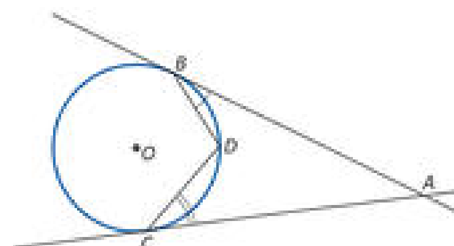
D **4.95.** Trzy okręgi o środkach O_1, O_2 i O_3 przecinają się w punkcie A. W okręgach tych zaznaczono kąty wpisane α, β, γ – jak na rysunku obok. Wykaż, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



D **4.96.** Cięciwy AB i CD okręgu przecinają się pod kątem $45°$. Wykaż, że $|\sphericalangle COA| + |\sphericalangle DOB| = 90°$.

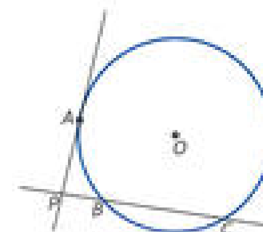


D **4.97.** Proste AB i AC są styczne w punktach B i C do okręgu o środku w punkcie O. Punkt D leży na łuku BC, wewnątrz trójkąta ABC, jak na rysunku poniżej. Wykaż, że suma $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle ACD|$ jest stała (tzn. nie zależy od położenia punktu D na łuku BC). Czy teza będzie prawdziwa, jeśli punkt D będzie leżał na łuku BC na zewnątrz trójkąta ABC?



Twierdzenie o stycznej i siecznej

4.98. Z punktu P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A oraz sieczną, przecinającą okrąg w punktach B i C Jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|PB| = 1$ cm oraz $|BC| = 8$ cm, oblicz $|PA|$.



4.99. Przez punkt P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A i sieczną, przecinającą ten okrąg kolejno w punktach B i C. Wiedząc, że $|PA| = 8$ cm oraz $|PB| = 4$ cm, oblicz długość cięciwy BC.

4.100. Przez punkt P leżący w odległości 11 cm od środka okręgu, poprowadzono sieczną, która przecięła ten okrąg kolejno w punktach A i B. Wiedząc, że $|PA| = |AB| = 6$ cm, oblicz promień tego okręgu.

4.101. W okręgu poprowadzono dwie cięciwy AB i CD, które przecięły się w punkcie P. Wiedząc, że $|AP| = 10$ cm, $|BP| = 4$ cm oraz $|PD| = 2{,}5$ cm, oblicz $|CP|$.

4.102. Punkt P przecięcia cięciw AB i CD okręgu dzieli cięciwę AB na odcinki długości 8 cm i 3 cm. Wiedząc, że $|CP| : |PD| = 3 : 2$, oblicz długość cięciwy CD.

4.103. Z punktu P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A i dwie sieczne: jedna zawiera średnicę okręgu i przecina okrąg kolejno w punktach B i C; druga przecina okrąg kolejno w punktach D i E. Wiedząc, że $|AP| = 24$, $|PB| = 18$ oraz $|PD| : |DE| = 3 : 1$, oblicz:

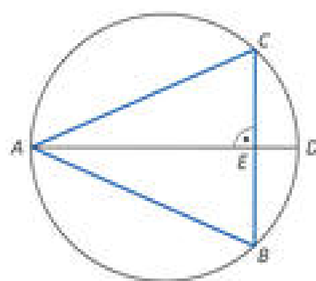
a) promień okręgu,

b) długość odcinka PE.

D **4.104.** Punkty A, B, C należą do okręgu. Styczna do okręgu w punkcie A przecina półprostą $CB^{\to}$ w punkcie P. Wykaż, że jeśli $|PB| : |BC| = 1 : 3$, to $|PA| : |PC| = 1 : 2$.

D **4.105.** Punkty A, B, C należą do okręgu. Styczna do okręgu w punkcie A przecina półprostą $CB^{\to}$ w punkcie P. Wykaż, że jeśli $|PA| : |PC| = 3 : 5$, to $|PB| : |BC| = 9 : 16$.

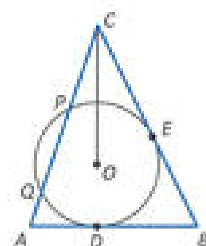
4.106. Na rysunku obok punkty A, B, C należą do okręgu oraz $|AB| = |AC|$. Średnica AD zawiera wysokość AE trójkąta ABC. Wiedząc, że $|AE| = 12$ cm oraz $|ED| = 3$ cm, oblicz długości boków tego trójkąta.



4.107. Na rysunku obok boki AB i BC trójkąta ABC są styczne do okręgu o środku w punkcie O, odpowiednio w punktach D i E. Odległość punktu C od punktu O jest równa 5. Okrąg przecina bok AC kolejno w punktach P i Q. Wiedząc, że $|PQ| = |PC| = 2\sqrt{2}$, oblicz:

a) promień okręgu,

b) długości odcinków, na jakie punkt E dzieli bok BC.

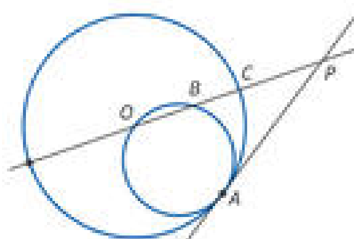


4.108. Środek O okręgu o promieniu 15 cm jest jednocześnie środkiem odcinka AB, którego długość jest równa 50 cm. Przez punkt A poprowadzono styczną do okręgu w punkcie C. Odcinek CB przecina okrąg w punkcie D. Oblicz $|CD|$ i $|DB|$.

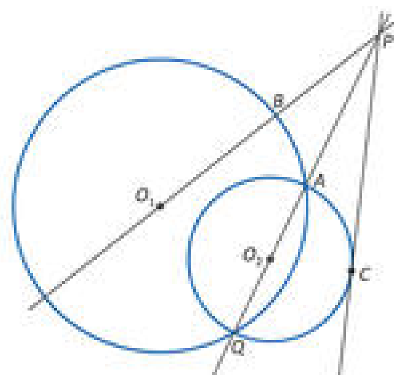
4.109. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie A, przy czym mniejszy okrąg przechodzi przez punkt O, będący środkiem większego okręgu. Przez punkt O poprowadzono sieczną mniejszego okręgu, która przecięła mniejszy okrąg w punkcie B, a większy w punkcie C. Styczna do okręgu w punkcie A przecina się z tą sieczną w punkcie P. Wiedząc, że $|OB| = \sqrt{5}$ oraz $|AP| = 10$, oblicz:

a) promień większego okręgu,

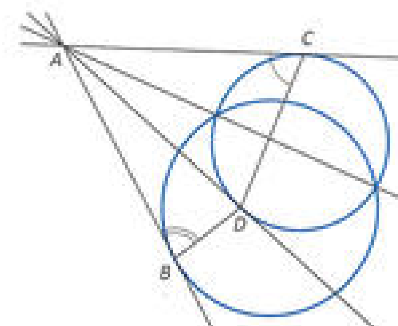
c) długość cięciwy AB mniejszego okręgu.



4.110. Na rysunku obok okręgi o środkach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i Q oraz punkt O_2 należy do cięciwy AQ. Z punktu P, leżącego na prostej AQ, poprowadzono styczną do okręgu o środku O_2 w punkcie C. Prosta PO_1 przecina okrąg w punkcie B. Wiedząc, że $|PA| = 8$, $|PB| = 6$ oraz $|PC| = 12$, oblicz $|O_1O_2|$.



D **4.111.** Punkt A należy do prostej przechodzącej przez punkty przecięcia dwóch okręgów o_1 i o_2. Z punktu A poprowadzono styczną do okręgu o_1 w punkcie B oraz styczne do okręgu o_2, odpowiednio w punktach D i C – jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle DBA| = 80°$ oraz $|\sphericalangle ACD| = 70°$, to trójkąt ABC jest równoboczny.



Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie

4.112. W trójkącie ABC, w którym $|AC| > |BC|$, spodek wysokości dzieli bok AB na odcinki AD i DB w taki sposób, że $|AD| : |DB| = 3 : 1$. Symetralna boku AB przecina bok AB w punkcie E, a bok AC w punkcie F. Wiedząc, że $|EF| = 2{,}1$ cm, oblicz $|CD|$.

4.113. W trójkącie ABC bok AB ma długość 16 cm. Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Symetralna boku AB przecina bok CB w punkcie P w taki sposób, że $|CP| : |PB| = 1 : 2$. Wiedząc, że odcinek tej symetralnej zawarty w trójkącie ma długość 6 cm, oblicz:

a) wysokość CD,

b) obwód trójkąta ABC,

c) odległość punktu D od wierzchołka B,

d) odległość punktu D od boku AC.

4.114. Symetralne boków trójkąta prostokątnego przecinają się w punkcie odległym od wierzchołka kąta prostego o 5 cm. Wiedząc, że długości przyprostokątnych pozostają w stosunku 3 : 4, oblicz obwód tego trójkąta.

4.115. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 2 cm i 6 cm. Oblicz stosunek długości odcinków, na jakie symetralna przeciwprostokątnej dzieli dłuższą przyprostokątną.

4.116. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle CAB| = 90°$, symetralna boku AB przecina ten bok w punkcie D, zaś bok BC w punkcie E. Wiedząc, że $|AB| = 42$ cm oraz $|DE| = 28$ cm, oblicz obwód trójkąta ABC.

4.117. W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku C jest równy $120°$. Symetralne boków trójkąta przecinają się w punkcie P. Wiedząc, że $|CP| = 4$ cm, oblicz długości boków trójkąta ABC.

D **4.118.** Na trójkącie ostrokątnym ABC opisano okrąg o środku S. Wykaż, że:

a) jeśli punkt S należy do jednej z wysokości trójkąta, to ten trójkąt jest równoramienny,

b) jeśli punkt S dzieli wysokość trójkąta w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka trójkąta, to ten trójkąt jest równoboczny.

4.119. Dane są długości boków a, b, c trójkąta. Jak jest położony względem tego trójkąta środek okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli:

a) $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$ b) $a = 6$, $b = 24$, $c = 25$

c) $a = 5$, $b = 6$, $c = 8$ d) $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$?

4.120. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, którego boki mają długość 6 cm.

4.121. Wysokość trójkąta równobocznego jest o 3 cm dłuższa od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość boku trójkąta.

4.122. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długość:

a) 2 cm i 2 cm b) 24 cm i 7 cm c) 60 cm i 11 cm.

4.123. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 6 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

4.124. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 65 cm, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 60 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

4.125. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka przeciwprostokątnej. Oblicz:

a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,

b) długości boków tego trójkąta.

4.126. Na trójkącie prostokątnym opisano okrąg o promieniu 10. Wiedząc, że wysokość tego trójkąta poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 8 cm, oblicz długości boków tego trójkąta.

4.127. W pewnym trójkącie kąt przy wierzchołku A jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku B. Wyznacz stosunek długości boków tego trójkąta, jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie ABC:

a) należy do boku AB b) należy do boku BC.

4.128. Na trójkącie prostokątnym opisano okrąg o środku w punkcie O. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość c, $c > 0$.

D a) Wykaż, że odległość punktu O od punktu S, będącego środkiem ciężkości tego trójkąta, jest równa $\frac{c}{6}$.

b) Wyznacz promień tego okręgu wiedząc, że odcinek OS jest o 10 cm krótszy od przeciwprostokątnej.

4.129. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 18 cm, a ramiona BC i AC – 15 cm. Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny. Oblicz wysokość CD tego trójkąta. Następnie wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie na dwa sposoby:

a) korzystając tylko z twierdzenia Pitagorasa,

b) korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów prostokątnych.

4.130. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 16 cm, a ramiona BC i AC – 10 cm. Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie na dwa sposoby, jak w zadaniu 4.129.

4.131. Dane są długości boków trójkąta równoramiennego. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

a) 25 cm, 25 cm, 14 cm b) 61 cm, 61 cm, 120 cm

4.132. W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC są równe i mają długość $4\sqrt{5}$. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 5, oblicz $|AB|$.

4.133. Symetralne boków trójkąta równoramiennego przecinają się w odległości 12,5 cm od wierzchołka przy podstawie i w odległości 10 cm od ramion trójkąta. Oblicz długości boków tego trójkąta.

D **4.134.** Wykaż, że jeśli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest równy długości ramion tego trójkąta, to stosunek długości ramienia do długości podstawy tego trójkąta wynosi $1:\sqrt{3}$.

D **4.135.** Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AC| = |BC|$. Wysokość poprowadzona na podstawę jest równa h. Na trójkącie ABC opisano okrąg o promieniu R. Wykaż, że jeśli odległość środka tego okręgu od ramienia BC jest równa $|BC|$, to $h : R = 2 : 5$. Czy trójkąt ABC jest ostrokątny czy rozwartokątny?

4.136. Podstawa trójkąta równoramiennego ostrokątnego ma długość 4. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $3\frac{1}{3}$. Oblicz wysokość h tego trójkąta poprowadzoną na podstawę oraz odległość d środka okręgu od ramion.

4.137. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość $28\frac{4}{17}$. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży w odległości 8 od ramion. Oblicz:

a) długość ramion trójkąta,

b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt

4.138. W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, dwusieczna kąta BAC tworzy z bokiem BC kąt 120°. Wyznacz kąty trójkąta ABC. Rozważ dwa przypadki.

4.139. W trójkącie ABC odcinek AD dwusiecznej kąta BAC ma długość taką, jak bok AB. Wiedząc, że $|\sphericalangle BAC| = 108°$, oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

4.140. W trójkącie kąty są równe: 20°, 60°, 100°. Poprowadzono dwusieczne kątów tego trójkąta. Oblicz miary kątów powstałych w ten sposób sześciu trójkątów.

4.141. W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg o środku O. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 130°$, oblicz miary kątów tego trójkąta.

4.142. Kąty trójkąta ABC są równe: 50°, 60°, 70°. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności wyznaczają wierzchołki trójkąta KLM. Wyznacz kąty trójkąta KLM.

4.143. Kąty trójkąta ABC są równe: 50°, 60°, 70°. Na trójkącie ABC opisano okrąg. Przez punkty A, B, C poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się kolejno w punktach K, L, M. Wyznacz kąty trójkąta KLM.

4.144. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty D, E, F są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z bokami AB, BC i AC. Wiedząc, że $|AD| = 5$ cm, $|DB| = 4$ cm oraz $|FC| = 3$ cm, oblicz obwód trójkąta ABC.

4.145. W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg. Wiedząc, że $|AC| = |BC| = 16$ cm oraz $|AB| = 12$ cm, oblicz długości odcinków, na jakie punkt styczności podzielił bok AC.

4.146. Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny, jeśli:

a) boki trójkąta mają długość 10 cm,

b) wysokości trójkąta przecinają się w punkcie, którego odległość od wierzchołków jest równa 5 cm.

4.147. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 4 cm dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz obwód tego trójkąta.

4.148. Wyznacz promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, jeśli:

a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 3,

b) różnica długości przyprostokątnej i r jest równa $1+\sqrt{2}$.

4.149. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 cm i 4 cm wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzieliły boki tego trójkąta.

4.150. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość:

a) 6 cm i 8 cm

b) 8 cm i 15 cm

c) 12 cm i 5 cm

d) $2\sqrt{5}$ cm i 4 cm.

4.151. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, jeśli:

a) przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 4 cm,

b) odległość środka okręgu od wierzchołka kąta prostego jest o 1 cm dłuższa od tego promienia.

D 4.152. Wykaż, że suma promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa średniej arytmetycznej długości przyprostokątnych tego trójkąta.

4.153. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wiedząc, że obwód tego trójkąta wynosi 30 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6,5 cm.

4.154. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 56 cm. Na trójkącie opisano okrąg i w trójkąt wpisano okrąg. Oblicz promienie tych okręgów wiedząc, że ich różnica wynosi 9,5 cm.

4.155. Dane są długości boków trójkąta równoramiennego. Wyznacz wysokość tego trójkąta poprowadzona na podstawę. Następnie oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, korzystając z twierdzenia o odcinkach stycznych i z twierdzenia Pitagorasa.

a) 5 cm, 5 cm, 6 cm　　b) 13 cm, 13 cm, 24 cm

4.156. Dane są długości boków trójkąta równoramiennego. Wyznacz wysokość tego trójkąta poprowadzona na podstawę. Następnie oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów.

a) 5 cm, 5 cm, 8 cm　　b) 25 cm, 25 cm, 14 cm

4.157. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wysokość CD jest równa 18 cm. Wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 8 cm, oblicz długości boków tego trójkąta.

4.158. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 12 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

4.159. Boki trójkąta mają długość 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna największego kąta trójkąta dzieli bok, leżący naprzeciw tego kąta.

4.160. Różnica długości dwóch boków trójkąta jest równa 6 cm. Dwusieczna kąta leżącego między tymi bokami przecina trzeci bok trójkąta w stosunku 3 : 1. Oblicz długości tych dwóch boków.

4.161. W trójkącie równoramiennym poprowadzono dwusieczną kąta przy podstawie, która podzieliła ramię na dwa odcinki mające długość: 4 cm i 6 cm. Oblicz długość podstawy tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

4.162. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, poprowadzono dwusieczną kąta BAC, która przecięła bok BC w punkcie D oraz $|CD| = 4\frac{4}{7}$ i $|BD| = 3\frac{3}{7}$.

a) Oblicz długość podstawy AB.

b) Wiedząc dodatkowo, że odcinek DE jest wysokością trójkąta ABD, oblicz $|AE|$ i $|BE|$.

4.163. W trójkącie równoramiennym boki mają długość 12 cm, 10 cm, 10 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków:

a) na jakie punkt styczności okręgu z ramieniem dzieli to ramię,

b) na jakie dwusieczna kąta przy podstawie dzieli przeciwległe temu kątowi ramię.

4.164. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość: 12 cm i 9 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków:

a) na jakie dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną,

b) na jakie punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną dzieli tę przeciwprostokątną.

4.165. W trójkącie prostokątnym ABC kąty ostre są równe: $|\sphericalangle B| = 30°$ $|\sphericalangle C| = 60°$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wiedząc, że $|AC| = 3$, oblicz:

a) długość odcinka CD,

b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,

c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.166. Boki trójkąta mają długość: 15, 20, 25. Oblicz długość odcinka dwusiecznej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka:

a) największego kąta　　b) najmniejszego kąta.

4.167. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 3 cm i 4 cm. Oblicz:

a) długości przyprostokątnych tego trójkąta,

b) długość odcinka tej dwusiecznej, zawartego w trójkącie.

4.168. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 12. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D, którego odległość od podstawy AB jest równa $4\frac{4}{11}$. Wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3, oblicz:

a) długość odcinka AD　　b) wysokość CE.

4.169. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 18 cm, a wysokość BD jest równa 14,4 cm. Dwusieczna kąta BAC przecina ramię BC w punkcie P. Oblicz:

a) długość ramion AC i BC,

b) długość odcinków BP i PC,

c) długość odcinka AP dwusiecznej kąta BAC.

D **4.170.** W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wykaż, że dwusieczna kąta przy podstawie przecina ramię w punkcie, którego odległość od podstawy jest równa $\frac{1}{3}$ wysokości poprowadzonej na tę podstawę.

4.171. Bok AC trójkąta ABC ma długość 25 cm, a wysokość CD jest równa 24 cm. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P. Wiedząc, że odległość punktu P od boku AB jest równa $10\frac{2}{3}$ cm, oblicz:

a) długość boku AB

b) długość boku BC.

4.172. W trójkąt równoramienny wpisano okrąg o środku O i promieniu r oraz na tym trójkącie opisano okrąg o środku S i promieniu R.

D a) Wykaż, że jeśli p oznacza odległość punktu O od wierzchołka trójkąta między ramionami, a d – odległość punktu S od ramienia tego trójkąta, to $r \cdot R = p \cdot d$.

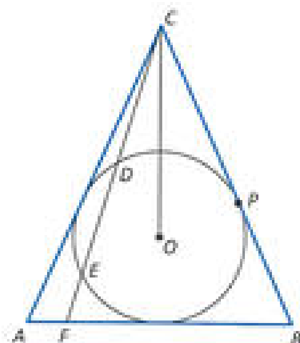
b) Wiedząc, że $p = 5$, $d = 3\frac{3}{4}$ oraz $R : r = 25 : 12$, oblicz r i R oraz $|OS|$.

4.173. W trójkąt rozwartokątny równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wpisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu równym 4 cm. Punkt P jest punktem styczności tego okręgu z ramieniem AC. Symetralna boku AC przecina ten bok w punkcie M oraz symetralną boku AB w punkcie S. Wiedząc, że $|PM| = 4{,}5$ cm oraz $|SM| = 10$ cm, oblicz:

a) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC,

b) długość boku AB.

4.174. W trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wpisano okrąg o środku w punkcie O. Punkty P i M są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z ramieniem BC i podstawą AB. Sieczna tego okręgu poprowadzona z punktu C przecina okrąg w punktach D i E, a podstawę AB w punkcie F. Wiedząc, że $|CD| = 4\sqrt{10} - 4$, $|DE| = 8$ oraz $|CO| = 13$, oblicz:



a) promień tego okręgu,

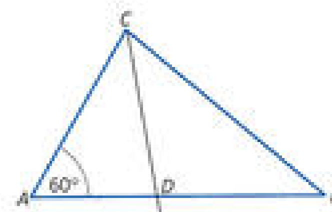
b) odcinki, na jakie punkt P dzieli ramię BC,

c) odległość punktu F od punktu M.

Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. W trójkącie ABC na rysunku obok kąt przy wierzchołku A jest równy 60°. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Jeżeli $|CD| = |DB|$, to kąt ACB ma miarę:

A. 90° B. 80°
C. 70° D. 60°

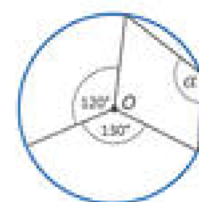


2. Kąt środkowy ma miarę 72° i jest oparty na łuku okręgu, mającym długość 4π. Promień tego okręgu jest równy:

A. 2 B. 4 C. 5 D. 10

3. Na rysunku obok dany jest okrąg o środku O, dwa kąty środkowe i kąt wpisany α. Wówczas:

A. $\alpha = 110°$ B. $\alpha = 120°$
C. $\alpha = 125°$ D. $\alpha = 130°$.

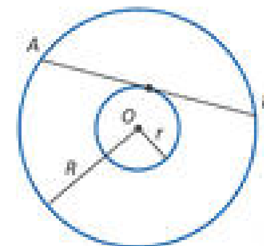


4. Średnica AB okręgu ma długość 2. Jeśli długość cięciwy BC jest równa 1, to:

A. $|AC| = 2$ B. $|AC| = \sqrt{3}$ C. $|AC| = \sqrt{2}$ D. $|AC| = 1$

5. Dwa okręgi o promieniach R i r są współśrodkowe, $R > r$. Cięciwa AB większego okręgu jest styczna do mniejszego okręgu. Jeśli $R^2 - r^2 = 9$, to:

A. $|AB| = 6$ B. $|AB| = 9$
C. $|AB| = 12$ D. $|AB| = 18$

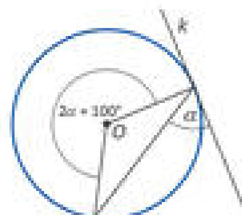


6. Odległość między środkami dwóch okręgów jest równa 6. Jeśli promienie tych okręgów są równe π oraz 2π, to okręgi te:

A. są rozłączne wewnętrznie B. są styczne wewnętrznie
C. są rozłączne zewnętrznie D. się przecinają

7. Na rysunku obok dany jest okrąg o środku O i kąt α dopisany do okręgu. Z danych na rysunku wynika, że:

A. $\alpha = 50°$ B. $\alpha = 55°$
C. $\alpha = 60°$ D. $\alpha = 65°$



8. Bok trójkąta równobocznego ma długość a, zaś promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R. Wówczas:

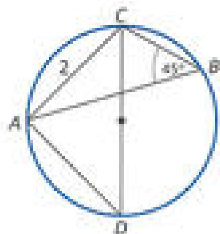
A. $a = 2R$ B. $a = R\sqrt{3}$ C. $a\sqrt{3} = 4R$ D. $a\sqrt{3} = 2R$

9. Boki trójkąta mają długość: 6 cm, 8 cm, 10 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

A. 2 cm B. 3 cm C. 4 cm D. 5 cm

10. Na rysunku obok trójkąty ABC i ADC są wpisane w okrąg o środku w punkcie O. Odcinek CD jest średnicą okręgu. Jeśli $|AC| = 2$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 45°$, to średnica tego okręgu ma długość:

A. $\sqrt{2}$ B. 2
C. $2\sqrt{2}$ D. 4



11. Bok AB trójkąta ABC ma długość 24 cm. Punkt przecięcia symetralnych boków BC i AC leży w odległości 5 cm od boku AB. Zatem promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy:

A. 13 cm B. 12 cm C. 11 cm D. 10 cm

12. W okręgu poprowadzono dwie cięciwy. Punkt przecięcia tych cięciw dzieli jedną z nich na odcinki długości 8 cm i 2 cm, a drugą na odcinki równej długości. Długość drugiej cięciwy jest równa:

A. 6 cm B. 8 cm C. 10 cm D. 12 cm

13. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 2 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Punkt D jest punktem styczności tego okręgu z ramieniem AC. Jeśli $|AD| : |DC| = 2 : 3$, to obwód trójkąta ABC jest równy:

A. 12 cm B. 9 cm C. 8 cm D. 7 cm

14. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC| = 36$ cm, poprowadzono dwusieczną kąta CBA, która przecięła ramię AC w punkcie D. Jeśli $|CD| : |AD| = 4 : 5$, to:

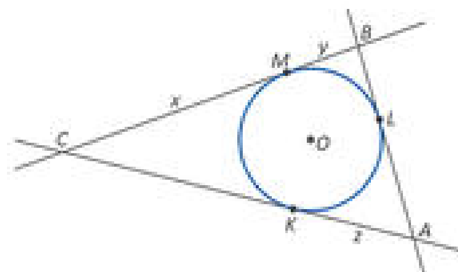
A. $|AB| = 28{,}8$ cm B. $|AB| = 40$ cm C. $|AB| = 45$ cm D. $|AB| = 54$ cm

15. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 3 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 8,5 cm. Suma długości przyprostokątnych tego trójkąta wynosi:

A. 17,5 cm B. 20 cm C. 23 cm D. 26 cm

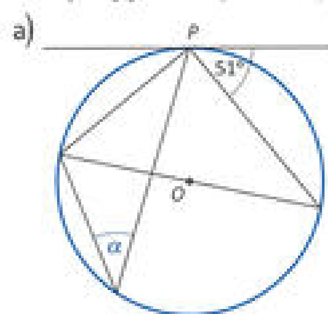
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

16. Na rysunku obok proste AB, BC, CA są stycznymi do danego okręgu odpowiednio w punktach L, M, K, przy czym $|CM| = x$, $|MB| = y$, $|KA| = z$. Wiadomo, że $x + y + z = 10$ cm oraz $3x = 2(y + z)$.
Oblicz długość boku AB.

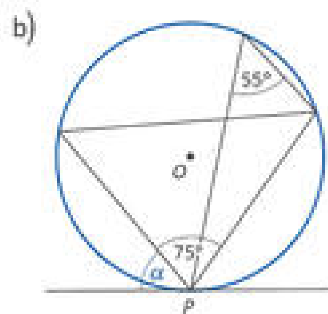


17. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i styczna do tego okręgu w punkcie P. Korzystając z danych na rysunku, oblicz α.

a)



b)

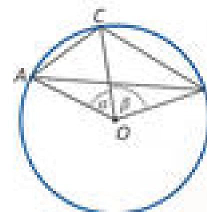


18. Punkty A, B, C należą do okręgu oraz $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACB|$. Przez punkty B i C poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się w punkcie D. Wiedząc, że $2|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CBA|$, oblicz miarę kąta między ramionami trójkąta ABC.

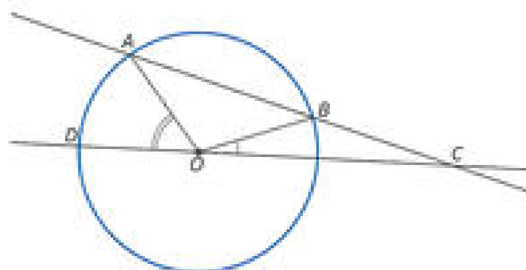
19. Na rysunku obok punkty A, B, C należą do okręgu o środku w punkcie O oraz dane są kąty środkowe α i β.

D a) Wykaż, że jeśli $\alpha = 54°$ i $\beta = 72°$, to $OA \parallel BC$.

b) Oblicz miary kątów trójkąta ABC w przypadku, gdy $\alpha = 50°$, $\beta = 78°$.



D 20. Punkty A, B, D należą do okręgu o środku w punkcie O. Sieczne AB i DO przecinają się w punkcie C, jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $|BC| = |BO|$, to $|\sphericalangle DOA| = 3|\sphericalangle COB|$.



21. Dwa okręgi $o(O_1, r)$ i $o(O_2, R)$, gdzie $r < R$, są styczne wewnętrznie w punkcie A oraz $|O_1O_2| = 4$ cm.

a) Wyznacz promienie tych okręgów wiedząc, że ich suma jest równa 10 cm.

D b) Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecięła mniejszy okrąg w punkcie B, a większy w punkcie C. Wykaż, że $O_1B \parallel O_2C$. Wiedząc dodatkowo, że $|BC| = 6$ cm, oblicz $|AB|$.

22. Promienie dwóch okręgów są równe: $r_1 = 2m - 1$ oraz $r_2 = 3m$. Odległość między środkami tych okręgów jest równa 14.

a) Wyznacz liczbę m, dla której te okręgi mają jeden punkt wspólny. Dla wyznaczonej liczby m podaj promienie tych okręgów.

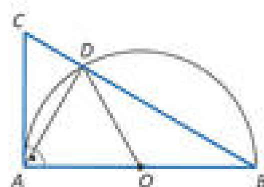
b) Dla jakich wartości m okręgi te mają dwa punkty wspólne?

23. Z punktu P, którego odległość od środka O okręgu jest równa 15 cm, poprowadzono sieczną, przecinającą okrąg w punktach A i B. Wiedząc, że promień okręgu jest równy 9 cm oraz $|PA| : |AB| = 1 : 3$, oblicz długość cięciwy AB.

D 24. W trójkącie prostokątnym ABC na rysunku obok punkt O jest środkiem dłuższej przyprostokątnej AB. Półokrąg o średnicy AB przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D. Wykaż, że jeśli $|AD| = |DO|$, to:

a) $|AC| = 2|CD|$

b) $4 \cdot |CD| \cdot |DB| = 3 \cdot |AC|^2$



25. W trójkącie ABC, w którym $|AC| < |BC|$, wysokość CD jest równa 4,5 cm. Symetralna boku AB przecina bok AB w punkcie E, a bok BC w punkcie F. Wiedząc, że $|EF| = 3$ cm, oblicz $|AD| : |DB|$.

26. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm. Oblicz:

a) długość odcinka DE symetralnej boku BC, zawartego w trójkącie ABC,

b) długość odcinka CF dwusiecznej kąta ACB.

27. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Wiedząc, że $|AB| = 20$ cm, $|AC| = 16$ cm oraz $|BC| = 12$ cm, oblicz długości odcinków:

a) na jakie punkty styczności podzieliły bok AB,

b) na jakie dwusieczna kąta ACB podzieliła bok AB.

28. W trójkącie równoramiennym poprowadzono dwusieczną kąta przy podstawie, która podzieliła przeciwległe ramię na odcinki długości: $7\frac{8}{23}$ oraz $5\frac{15}{23}$ – kolejno od wierzchołka między ramionami trójkąta. Oblicz:

a) długość podstawy,

b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,

c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

29. W trójkącie prostokątnym spodek najkrótszej wysokości dzieli przeciwprostokątną w stosunku 9 : 16. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 25 cm, oblicz:

a) długości boków tego trójkąta,

b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

30. W trójkącie prostokątnym najkrótsza wysokość jest równa 15, a najkrótszy bok ma długość 17. Oblicz:

a) długości pozostałych boków trójkąta,

b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,

b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

31. Dane są dwa okręgi $o(O_1, 3)$ i $o(O_2, 2)$ oraz $|O_1O_2| = 12{,}5$. Wspólna styczna wewnętrzna tych okręgów przecina odcinek O_1O_2 w punkcie P. Oblicz $|O_1P|$ i $|PO_2|$.

32. Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie: okrąg o środku w punkcie O_1 i promieniu $r_1 = 3a$ oraz okrąg o środku w punkcie O_2 i promieniu $r_2 = 4 - a$, gdzie $a \in (0, 4)$. Odcinek O_1O_2 ma długość 8.

a) Oblicz r_1 i r_2.

b) Wiedząc dodatkowo, że prosta O_1O_2 przecina styczną zewnętrzną do tych okręgów w punkcie A, oblicz $|O_1A|$.

33. Promienie dwóch okręgów są odpowiednio równe: $r_1 = 5 - m$, $r_2 = 3 + m$, a odległość między ich środkami wynosi m. Podaj wszystkie wartości m, spełniające warunki zadania. Ustal w zależności od wartości m wzajemne położenie tych okręgów.

D 34. Dany jest odcinek AB, którego długość jest równa 20. Środek O tego odcinka jest środkiem okręgu o promieniu 6. Z punktu A poprowadzono styczną do okręgu w punkcie C. Odcinek BC przecina okrąg w punkcie D. Wykaż, że $|CD| = \frac{36}{\sqrt{13}}$.

D 35. Dwa okręgi o różnych promieniach przecinają się w punktach A i B. Przez punkt B poprowadzono sieczną prostopadłą do cięciwy AB, która przecięła te okręgi odpowiednio w punktach C i D. Wykaż, że $|CD| = 2|O_1O_2|$.

36. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wysokość CD jest równa 25 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 8 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

37. W trójkącie prostokątnym boki przyległe do kąta prostego mają długość 6 i 12. Na tym trójkącie opisano okrąg. Oblicz:

a) promień tego okręgu,

b) odległość środka ciężkości trójkąta od środka tego okręgu,

c) odległość spodka wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego od środka tego okręgu.

38. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 10 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Punkt styczności tego okręgu z przeciwprostokątną znajduje się w odległości 2 cm od środka okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

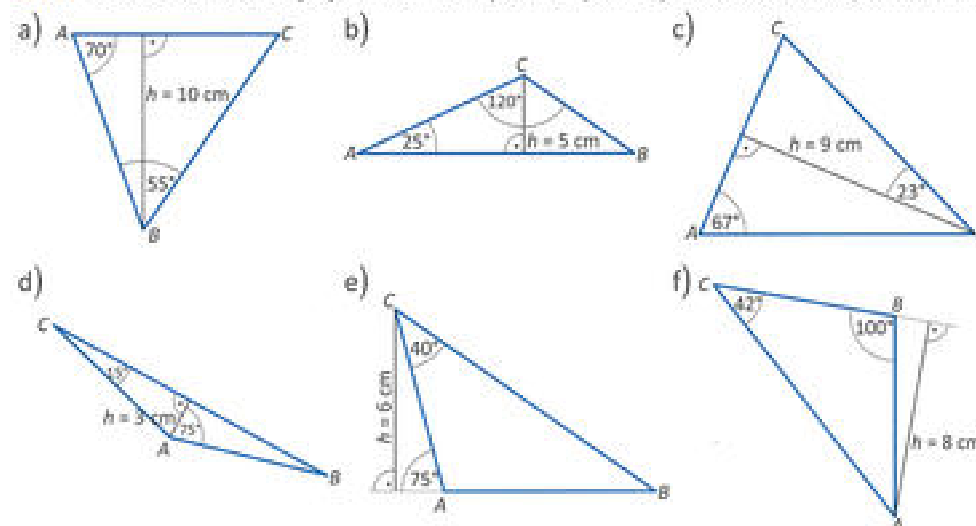
39. W trójkącie ABC bok AC ma długość 10 cm. Wysokość CD dzieli bok AB na odcinki AD i DB. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P. Wiedząc, że $|AD| = 6$ cm, $|DB| = 9$ cm, oblicz odległość punktu P od podstawy AB.

D 40. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przeciwległy bok w stosunku 2 : 3. Wykaż że stosunek promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$.

5. Trygonometria

Trygonometria kąta ostrego – powtórzenie wiadomości z klasy 1.

5.1. Oblicz obwód trójkąta ABC na rysunku poniżej z dokładnością do 0,5 cm:



5.2. Średnica AB okręgu ma długość 10 cm. Cięciwa CD, prostopadła do średnicy AB, jest oddalona od punktu A o 9 cm. Oblicz:

a) tangens kąta CBA

b) sinus kąta CAB.

5.3. Oblicz:

a) $(\cos 30° - \sin 45°)(\sin 60° + \cos 45°)$

b) $(3\,\mathrm{tg}\,30° - \mathrm{ctg}\,45°)^2 - 8 \cdot \sin 30°$

c) $\left(\sqrt{2} \cdot \mathrm{ctg}\,60° + \sqrt{3} \cdot \cos 45°\right)\left(6\,\mathrm{tg} \cdot 45° - \sqrt{72} \cdot \mathrm{tg}\,60°\right)$.

5.4. W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 4 cm i przecinają się pod kątem:

a) 60°

b) 45°

c) 30°.

Oblicz odległość punktu B od przekątnej AC.

5.5. Wyznacz kąt α, $\alpha \in (0°, 90°)$, wiedząc, że:

e) $\text{tg}\alpha = \sqrt{3}$ f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\text{ctg}\alpha = 1$.

5.6. W trójkącie ABC kąty przy podstawie AB są ostre. Poprowadzono wysokość CD. Wyznacz kąty trójkąta ABC, jeśli:

a) $|AC| = 10$, $|CD| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 10\sqrt{2}$

b) $|AD| = 2$, $|DB| = 6$, $|BC| = \sqrt{48}$.

5.7. Skonstruuj trójkąt prostokątny, w którym:

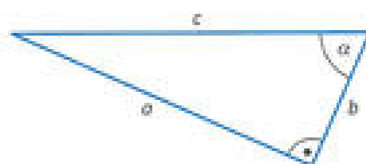
a) $|\sphericalangle A| = 90°$, $\sin|\sphericalangle B| = \frac{1}{3}$ b) $|\sphericalangle C| = 90°$, $\cos|\sphericalangle A| = \frac{3}{4}$

5.8. Dana jest jedna z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ b) $\cos\alpha = \frac{60}{61}$ c) $\text{tg}\alpha = 2\frac{2}{5}$ d) $\text{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$

D **5.9.** Dwa kąty ostre trójkąta mają miary α i β. Wykaż, że jeśli $\text{tg}\alpha = 2\cdot\sin\alpha$ oraz $\cos\beta = \sqrt{3}\cdot\cos\alpha$, to ten trójkąt jest prostokątny, a długości jego boków pozostają w stosunku $1 : \sqrt{3} : 2$.

D **5.10.** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość a i b, zaś przeciwprostokątna ma długość c. Wykaż, że jeśli naprzeciw boku a leży kąt α taki, że $\text{tg}\,\alpha = 2$, to $\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{1}{25}$.



D **5.11.** Wykaż, że jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz $\text{ctg}\alpha = 4$, to $\frac{32\cdot\sin\alpha - \sin(90°-\alpha)}{6\cdot\cos(90°-\alpha)+2\cdot\cos\alpha} = 2$.

D **5.12.** Wykaż, że:

a) $\text{tg}5°\cdot\text{tg}25°\cdot\text{tg}45°\cdot\text{tg}65°\cdot\text{tg}85° = 1$

b) $\cos^2 20° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 70° = 2$

c) $\sin^4 20° + \sin^4 70° + 2\cdot\cos^2 20°\cdot\cos^2 70° = 1$.

Sinus, cosinus tangens i cotangens dowolnego kąta płaskiego

5.13. Na końcowym ramieniu kąta α, umieszczonego w układzie współrzędnych w położeniu standardowym, znajduje się punkt P. Wyznacz odległość tego punktu od punktu $O(0, 0)$. Następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α – o ile istnieją.

a) $P(12, 5)$ b) $P(-2, 2\sqrt{3})$ c) $P(-\sqrt{3}, -\sqrt{6})$

d) $P(15, -8)$ e) $P(0, -3)$ f) $P(-5, 0)$

5.14. Punkt P znajduje się na końcowym ramieniu kąta α w położeniu standardowym. Odległość tego punktu od początku układu współrzędnych jest równa r. Wyznacz brakującą współrzędną punktu P i oblicz funkcje trygonometryczne kąta α, jeśli:

a) $P(-3, y)$, $r = 5$, $\alpha \in (180°, 270°)$

b) $P(x, 2)$, $r = \sqrt{13}$, $\alpha \in (90°, 180°)$

c) $P(x, 4)$, $r = 8{,}5$ $\alpha \in (0°, 90°)$

d) $P(4\sqrt{3}, y)$, $r = 7$, $\alpha \in (270°, 360°)$.

5.15. Kąt α znajduje się w położeniu standardowym. Punkt $P(x, y)$ leży na końcowym ramieniu tego kąta, w odległości r od punktu $O(0, 0)$. Oblicz współrzędne punktu P, jeśli:

a) $\alpha \in (0°, 90°)$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $r = 6$

b) $\alpha \in (90°, 180°)$, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $r = 9$

c) $\alpha \in (180°, 270°)$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $r = 10$

d) $\alpha \in (270°, 360°)$, $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $r = 2\sqrt{3}$.

5.16. Kąt α znajduje się w położeniu standardowym. Punkt $P(x, y)$ wybrano na końcowym ramieniu tego kąta, w odległości r od punktu $O(0, 0)$. Oblicz współrzędne punktu P, jeśli:

a) $\alpha \in (180°, 270°)$, $\text{tg}\,\alpha = 2$, $r = 2\sqrt{5}$

b) $\alpha \in (90°, 180°)$, $\text{tg}\,\alpha = -3$, $r = \sqrt{10}$

c) $\alpha \in (270°, 360°)$, $\text{ctg}\alpha = \frac{-4}{3}$, $r = 15$

d) $\alpha \in (0°, 90°)$, $\text{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$, $r = 5$.

5.17. Jaką miarę ma kąt α, jeśli $\alpha \in \langle 0°, 360°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = 1$ b) $\text{tg}\alpha = 0$ c) $\cos\alpha = 0$.

Dla wyznaczonej miary α oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta, o ile istnieją.

5.18. Oblicz – korzystając z definicji – wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\alpha = 210°$ b) $\alpha = 240°$ c) $\alpha = 135°$ d) $\alpha = 330°$.

5.19. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się końcowe ramię kąta α w położeniu standardowym, jeżeli:

a) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha < 0$
b) $\sin\alpha < 0$ i $\text{tg}\alpha < 0$
c) $\text{tg}\alpha > 0$ i $\text{ctg}\alpha > 0$
d) $\cos\alpha < 0$ i $\text{tg}\alpha < 0$
e) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$
f) $\cos\alpha > 0$ i $\text{tg}\alpha < 0$.

5.20. Kąt α jest ostry. Jaką wartość: dodatnią czy ujemną, ma poniższe wyrażenie?

a) $\sin(90° + \alpha) \cdot \cos(180° + \alpha) + \text{tg}(270° + \alpha)$

b) $\cos(90° - \alpha) \cdot \cos(180° - \alpha) \cdot \sin(360° - \alpha)$

c) $\text{ctg}(270° + \alpha) + \sin(180° + \alpha)$

d) $\cos[(180° + \alpha) + \sin(270° + \alpha)] \cdot \text{tg}(180° - \alpha)$

5.21. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(x, y)$ wybrano na końcowym ramieniu tego kąta w odległości r od punktu $O(0, 0)$. Oblicz współrzędne punktu P, jeśli:

a) $\text{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha < 0$, $r = \sqrt{13}$
b) $\text{ctg}\alpha = -3$, $\sin\alpha > 0$, $r = 5$

c) $\text{tg}\alpha = -\frac{2}{5}$, $\cos\alpha > 0$, $r = \frac{\sqrt{29}}{5}$
d) $\text{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha > 0$, $r = \frac{\sqrt{41}}{3}$

D **5.22.** Wykaż, że jeśli $\alpha \in \langle 0°, 360°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = \cos\alpha$, to $\alpha \in \{45°, 225°\}$
b) $\sin\alpha = -\cos\alpha$, to $\alpha \in \{135°, 315°\}$

5.23. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt o mierze α, wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ b) $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$ c) $\text{tg}\alpha = 3\frac{1}{2}$

d) $\text{ctg}\alpha = -6$ e) $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$ f) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Rozważ dwa przypadki.

5.24. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt o takiej mierze α, że:

a) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$ i $\text{tg}\alpha < 0$
b) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ i $\text{ctg}\alpha > 0$

c) $\text{tg}\alpha = 2\frac{1}{3}$ i $\sin\alpha < 0$
d) $\text{ctg}\alpha = -\sqrt{2}$ i $\cos\alpha > 0$

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

5.25. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = 0{,}8$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ c) $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ d) $\text{ctg}\alpha = -7$.

5.26. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 180°)$ oraz:

a) $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $\text{ctg}\alpha = -\frac{11}{60}$.

5.27. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$
b) $\text{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$

c) $\text{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$ i $(270, 360)$
d) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in (270°, 360°)$.

5.28. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, jeśli:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ b) $\sin\alpha = -\frac{60}{61}$ c) $\text{ctg}\alpha = 3$ d) $\text{ctg}\alpha = \frac{45}{28}$.

5.29. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{4\cdot\sin\alpha-5\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha+3\cdot\sin\alpha}$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha=5$

b) $\frac{-3\cdot\cos\alpha+6\cdot\sin\alpha}{8\cdot\sin\alpha+3\cdot\cos\alpha}$, jeśli $\operatorname{ctg}\alpha=-2$.

5.30. Kąt α jest rozwarty. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos\alpha-\sin^2\alpha$, jeśli $\cos^2\alpha=0{,}81$

b) $2\cdot\cos\alpha+\sin\alpha$, jeśli $\sin^2\alpha=0{,}25$

c) $\operatorname{tg}\alpha-6\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}^2\alpha=144$

d) $\frac{3\cdot\sin\alpha+4\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cdot\cos\alpha}$, jeśli $\operatorname{ctg}^2\alpha=100$.

5.31. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(0°, 90°)$ oraz $4\cdot\sin^2\alpha=3\cdot\cos^2\alpha$

b) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(90°, 180°)$ oraz $5\cdot\cos^2\alpha=2\cdot\sin^2\alpha$

c) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(180°, 270°)$ oraz $9\cdot\sin^2\alpha-5\cdot\cos^2\alpha=2$

d) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha\in(270°, 360°)$ oraz $4\cdot\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=3$.

5.32. Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, jeśli $\alpha\in(0°, 90°)\cup(90°, 180°)$.

a) $1-2\cdot\sin^2\alpha=2\cdot\cos^2\alpha-1$

b) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cdot\cos^2\alpha-1$

c) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=1+\operatorname{tg}\alpha$

d) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)$

e) $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}=1+\frac{1}{\cos\alpha}$

f) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}=1+\frac{1}{\sin\alpha}$

5.33. Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, jeśli $\alpha\in(0°, 90°)\cup(90°, 180°)$.

a) $\cos\alpha\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)=\sin^2\alpha$

b) $1-\sin\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$

c) $\frac{2}{\sin^2\alpha}-1=1+2\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$

d) $\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\alpha}=\frac{2}{\sin^2\alpha}$

e) $\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$

f) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

5.34. Wiedząc, że α jest kątem rozwartym oraz $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$, oblicz:

a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $\sin\alpha-\cos\alpha$

c) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

5.35. Wiedząc, że $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz:

a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$

d) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

5.36. Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=4$, oblicz:

a) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$

b) $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$

c) $(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$

D **5.37.** Wykaż, że jeśli $\alpha\in(0°, 90°)$ oraz $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{7}{18}$, to $\sin\alpha+\cos\alpha=1\frac{1}{3}$.

D **5.38.** Wykaż, że jeśli $\alpha\in(0°, 90°)\cup(180°, 270°)$ oraz $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2\frac{1}{6}$, to $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=2\frac{25}{36}$.

5.39. Zbadaj, czy istnieje kąt α, $\alpha\in\langle 0°, 360°)$, który spełnia następujące warunki:

a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$ i $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

b) $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha=-2\sqrt{2}$

d) $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{6}$ i $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{6}}{12}$

Jeśli tak, to do której ćwiartki układu współrzędnych należy końcowe ramię kąta α w położeniu standardowym?

5.40. Czy $\sin\alpha$ może się równać:

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{-\sqrt{15}}{4}$

c) $\frac{-1}{\sin\beta}$ dla pewnego kąta β

d) $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta$ dla pewnego kąta β?

5.41. Czy $\cos\alpha$ może się równać:

a) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$

b) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

c) $\frac{1}{\sin\beta}$ dla pewnego kąta β

d) $\operatorname{tg}\beta$ dla pewnego kąta β?

5.42. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha = b$, gdzie $\alpha \in (180°, 270°)$ i $b \in (-1, 0)$

b) $\cos\alpha = a$, gdzie $\alpha \in (270°, 360°)$ i $a \in (0, 1)$.

D 5.43. Wykaż, że równość $\frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} + \frac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = 2$ nie jest tożsamością trygonometryczną.

D 5.44. Wykaż, że dana równość nie jest tożsamością trygonometryczną.

a) $\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \sin^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

b) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

D 5.45. Wykaż, że dana równość nie jest tożsamością trygonometryczną.

a) $\frac{\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$

b) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin\alpha$

D 5.46. Wykaż, że jeśli $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, to:

a) $|\sin\alpha - \cos\alpha| = \frac{\sqrt{17}}{3}$

b) $|\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha| = 2\frac{1}{4}$

5.47. Wykaż, że jeśli $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, to:

a) $\frac{-1}{2} \le \sin\alpha \cdot \cos\alpha \le \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4} \le \sin^4\alpha + \cos^2\alpha \le 1$

D 5.48. Wykaż, że miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 18x^2 - 24x + 7 = 0$ są sinusem i cosinusem pewnego kąta ostrego.

D 5.49. Wykaż, że miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 8x^2 - 4x - 3$ są sinusem i cosinusem pewnego kąta.

5.50. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $4x^2 - 4ax + a^2 = 0$ ma jedno rozwiązanie, będące jednocześnie sinusem i cosinusem tego samego kąta. Jaką miarę ma ten kąt?

5.51. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla którego rozwiązania równania $3ax^2 - 4ax + 7 = 0$ są sinusem i cosinusem pewnego kąta. Dla wyznaczonej wartości a podaj te rozwiązania. W której ćwiartce znajduje się ramię tego kąta w położeniu standardowym?

Wybrane wzory redukcyjne

5.52. Oblicz, stosując wzory redukcyjne:

a) $\sin 120° \cdot \cos 150° + \mathrm{tg}\,135°$

b) $\mathrm{tg}\,120° \cdot \mathrm{ctg}\,30° + \cos^2 135°$

c) $(\cos 120° - \mathrm{tg}\,150°)^2$

d) $(\sin 135° - \mathrm{tg}\,120°) \cdot (\cos 135° - \mathrm{ctg}\,150°)$.

5.53. Dane są liczby:

$a = \sin 120° + \cos 150° - 2 \cdot \mathrm{tg}\,45°$

$b = \left(\frac{\sin 60° - 2 \cdot \cos 135°}{\mathrm{tg}\,120°}\right)^2$

$c = (\cos 150° + \sin 135°)(\cos 30° + \sin 45°)$

$d = \mathrm{tg}\,150° \cdot \cos 30° + \sin 90°$.

Która z tych liczb jest liczbą wymierną?

5.54. Porównaj liczby x i y.

a) $x = \sin 135°$, $y = \mathrm{tg}^2 150°$

b) $x = -\sqrt{3} \cdot \cos 120°$, $y = \sin 120°$

c) $x = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,120°}$, $y = \frac{1}{\cos 135°}$

d) $x = 4^{\sin 150°}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cos 120°}$

5.55. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora.

a) $4 \cdot \sin 300° \cdot \cos 330° \cdot \mathrm{ctg}\,315°$

b) $\cos 240° \cdot \sin 180° + \cos 0°$

c) $\sin^2 217° + \cos^2 127° + 2 \cdot \sin 37° \cdot \cos 127°$

d) $\mathrm{tg}\,225° - \mathrm{ctg}\,135° - \sin 0°$

e) $\cos 0° + \sin 90° - \sin 270° - \mathrm{tg}\,180°$

5.56. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora.

a) $2 \cdot \cos 120° + 4 \cdot \mathrm{tg}\,210° \cdot \sin 120°$

b) $3 \cdot \mathrm{tg}\,225° \cdot \cos 300° + \sin 150°$

c) $\cos 210° \cdot \mathrm{ctg}\,210° + \sin 315° \cdot \cos 315°$

d) $\sin 150° \cdot \mathrm{tg}\,225° + \sin^2 300°$

e) $\sin 180° + \cos 90° + \cos 180° + \sin 270°$

5.57. Wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$, doprowadź poniższe wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $\sin(180°-\alpha)\cdot\cos(90°+\alpha)-\cos^2(180°-\alpha)$

b) $\sin(90°+\alpha)\cdot \mathrm{tg}(180°-\alpha)+\cos(180°-\alpha)\cdot \mathrm{ctg}(90°+\alpha)$

c) $\cos(90°-\alpha)\cdot\sin(180°-\alpha)-\sin(90°-\alpha)\cdot\cos(180°-\alpha)$

d) $\mathrm{tg}(90°+\alpha)\cdot \mathrm{tg}(180°-\alpha)+\mathrm{ctg}(90°-\alpha)\cdot \mathrm{tg}(90°-\alpha)$

5.58. Kąty trójkąta mają miary: α, β, γ. Oblicz funkcje trygonometryczne kąta $\alpha+\beta$, jeśli:

a) $\gamma = 60°$
b) $\gamma = 30°$
c) $\cos\gamma = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
d) $\mathrm{tg}\gamma = -1$

5.59. Wyznacz α, $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, wiedząc, że:

a) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\alpha < 0$
b) $\sin\alpha = 0$ i $\cos\alpha = -1$
c) $\mathrm{ctg}\alpha = -1$ i $\sin\alpha > 0$
d) $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\cos\alpha > 0$
e) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\alpha < 0$
f) $\mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ i $\sin\alpha > 0$.

D **5.60.** Wiadomo, że kąt α jest ostry i $\frac{\sin(180°-\alpha)}{\sin(90°-\alpha)}+\frac{\mathrm{tg}(90°+\alpha)}{\mathrm{tg}(90°-\alpha)}=3$. Wykaż, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

D **5.61.** Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta, to:

a) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$
b) $\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$.

D **5.62.** Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α równość:

$\frac{\sin(200°+\alpha)-3\cos(250°-\alpha)}{\cos[90°-(20°+\alpha)]}=2$ jest tożsamością.

D **5.63.** Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α, równość:

$\frac{\cos^2(270°-\alpha)}{\sin^{-2}(\alpha+90°)-1}+\frac{\sin^2(\alpha+270°)}{\cos^{-2}(90°-\alpha)-1}=1$ jest tożsamością.

Kąt skierowany. Miara łukowa kąta

5.64. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąty skierowane α i β, jeśli:

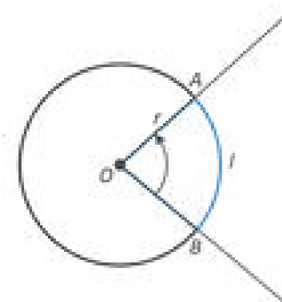
a) $\alpha = 30°$ $\beta = -30°$
b) $\alpha = 135°$ $\beta = -135°$
c) $\alpha = 240°$ $\beta = -240°$
d) $\alpha = 435°$ $\beta = -435°$.

5.65. Oblicz miarę główną kąta skierowanego β, jeśli:

a) $\beta = 457°$
b) $\beta = -130°$
c) $\beta = 850°$
d) $\beta = -520°$
e) $\beta = 1710°$
f) $\beta = -2010°$.

5.66. Oblicz miarę łukową kąta skierowanego *BOA*, zobacz rysunek obok, jeśli:

a) $r=\frac{1}{2}$ $l=3$
b) $r=\frac{1}{4}$ $l=\frac{1}{2}$
c) $r=2\frac{1}{2}$ $l=\frac{\pi}{3}$
d) $r=3$ $l=4\pi$
e) $r=\pi$ $l=2\pi$
f) $r=\sqrt{3}$ $l=\frac{3\pi}{4}$



5.67. Zamień na radiany:

a) 18°
b) 20°
c) −2°
d) −108°
e) 252°
f) −300°
g) 135°
h) −210°.

5.68. Zamień na stopnie:

a) $\frac{7}{10}\pi$
b) $\frac{5}{2}\pi$
c) $-\frac{2}{9}\pi$
d) $-\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{2}{3}\pi$
f) $-\frac{41}{6}\pi$
g) $\frac{11}{4}\pi$
h) $\frac{13}{3}\pi$.

5.69. Wyznacz w radianach miarę kąta ostrego, który tworzą wskazówki zegara o godzinie:

a) 15^{30} b) 17^{40} c) 22^{20}

d) 12^{15} e) 2^{10} f) 23^{00}.

5.70. Od północy wskazówka minutowa obróciła się o kąt:

a) $-\frac{14}{3}\pi$ b) $-\frac{49}{3}\pi$ c) $-\frac{61}{6}\pi$

d) $-\frac{15}{2}\pi$ e) $-\frac{101}{5}\pi$ f) $-\frac{61}{30}\pi$.

Którą godzinę wskazuje zegar?

5.71. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}$ b) $\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}$

c) $\text{ctg}\frac{\pi}{6}+\text{ctg}\frac{\pi}{4}\cdot\text{ctg}\frac{\pi}{3}$ d) $\text{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\text{tg}\frac{\pi}{4}-\text{tg}\frac{\pi}{3}$

5.72. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych:

a) $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\text{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\text{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

c) $\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ d) $\text{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

5.73. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\text{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ d) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$.

5.74. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\pi\cdot\text{tg}\frac{7\pi}{6}\cdot\text{ctg}\frac{5\pi}{4}$ b) $\sin\frac{7\pi}{4}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}$

c) $\text{tg}\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{7\pi}{6}+\text{ctg}\frac{5\pi}{4}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}$ d) $\sin\frac{11\pi}{6}:\cos\frac{2\pi}{3}-\text{tg}\frac{5\pi}{3}\cdot\text{ctg}\frac{5\pi}{6}$

5.75. Dana jest jedna z funkcji trygonometrycznych kąta α, gdzie $\alpha\in\langle 0, 2\pi)$. Podaj miarę kąta α w radianach. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta, o ile istnieją.

a) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg}\alpha=-1$ e) $\sin\alpha=0$ f) $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

5.76. Wyznacz α, $\alpha\in\langle 0, 2\pi)$, jeśli:

a) $\text{tg}\alpha=1$ i $\sin\alpha<0$ b) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ i $\text{tg}\alpha<0$

c) $\sin\alpha=\frac{-1}{2}$ i $\cos\alpha>0$ d) $\text{ctg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\sin\alpha<0$

5.77. Wyznacz α, $\alpha\in\langle 0, 2\pi)$, jeśli:

a) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\alpha<0$ b) $\sin\alpha=-1$

c) $\text{ctg}\alpha=-1$ i $\sin\alpha>0$ d) $\text{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\cos\alpha>0$

5.78. Oblicz wartość wyrażenia $\cos\alpha-\cos\beta$, jeśli $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ oraz $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{5}$.

5.79. Oblicz wartość wyrażenia $\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$, jeśli $\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ oraz $\text{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\text{tg}\beta=-\frac{3}{4}$.

5.80. Oblicz wartość wyrażenia $\text{ctg}\beta\cdot\sin\alpha-\text{tg}\alpha\cdot\cos\beta$, jeśli $\alpha,\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ oraz $\cos\alpha=-\frac{11}{61}$, $\text{tg}\beta=3\frac{3}{7}$.

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

5.81. Oblicz:

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ b) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ d) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

e) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ f) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ g) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ h) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

5.82. Oblicz:

a) $\sin\frac{9\pi}{4}\cdot\cos(-3\pi)$ b) $\cos\frac{13\pi}{6}\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

c) $\mathrm{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ d) $\cos\left(3\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(4\pi-\frac{5\pi}{6}\right)$

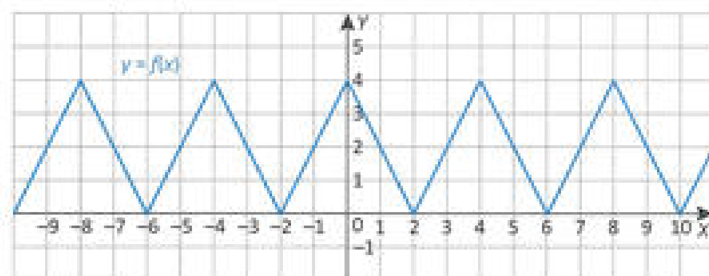
e) $\mathrm{tg}\left(2\pi-\frac{7\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(-\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ f) $\sin\left(-2\pi+\frac{11\pi}{6}\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(-\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

5.83. Oblicz:

a) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{24}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{tg}\pi$ b) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{10}\cdot\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{10}\cdot\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{10}\cdot\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{10}$

c) $\cos\frac{12\pi}{2}+\cos\frac{12\pi}{3}+\cos\frac{12\pi}{4}+\cos\frac{12\pi}{6}$ d) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\frac{5\pi}{2}\cdot\sin\frac{7\pi}{2}$.

5.84. Na rysunku poniżej znajduje się wykres funkcji okresowej f, określonej w zbiorze liczb rzeczywistych.



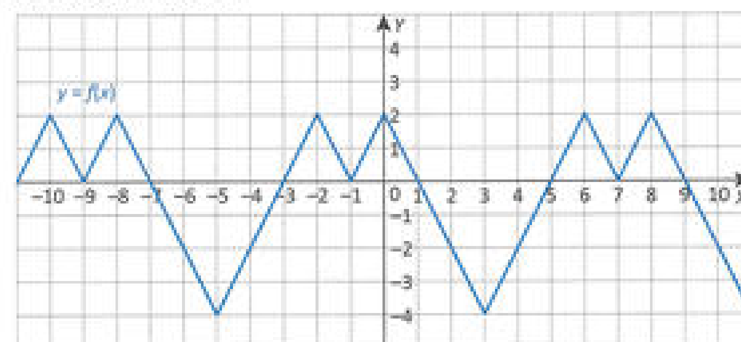
a) Podaj okres podstawowy funkcji f.

b) Zapisz symbolicznie miejsca zerowe tej funkcji.

c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość największą?

d) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 2.

5.85. Na rysunku poniżej znajduje się wykres funkcji okresowej f, określonej w zbiorze liczb rzeczywistych.



a) Podaj okres podstawowy funkcji f.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą?

c) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą.

d) Zapisz symbolicznie miejsca zerowe tej funkcji.

e) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość −2.

5.86. Funkcja okresowa f każdej liczbie całkowitej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 5.

a) Naszkicuj fragment wykresu tej funkcji w zbiorze $\{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$.

b) Podaj okres podstawowy funkcji f.

c) Zapisz wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 2.

d) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość?

5.87. Funkcja okresowa g jest określona w zbiorze liczb całkowitych w następujący sposób:

- dowolnej liczbie parzystej, niepodzielnej przez 3, funkcja g przyporządkowuje wartość −2;
- dowolnej liczbie nieparzystej, niepodzielnej przez 3, funkcja g przyporządkowuje wartość −1;
- dowolnej liczbie całkowitej, podzielnej przez 3 funkcja g przyporządkowuje wartość 3.

a) Naszkicuj wykres funkcji g w układzie współrzędnych.

b) Podaj okres podstawowy funkcji g.

c) Zapisz symbolicznie argumenty, dla których funkcja g przyjmuje wartość ujemną.

5.88. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $y = \sin 4x$ b) $y = \cos\frac{x}{3}$ c) $y = \operatorname{tg}\pi x$

d) $y = \operatorname{ctg}2x$ e) $y = \sin\frac{2x}{3}$ f) $y = \cos\frac{x}{2}$

5.89. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$ b) $y = \operatorname{tg}(\sqrt{3}x) - 4$ c) $y = -\operatorname{ctg}(x+1)$

d) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ e) $y = 3\cdot\operatorname{ctg}(-4\pi x) + 2$ f) $y = 2\cdot\sin\left(\frac{-\pi x + \pi}{2}\right)$

5.90. Zbadaj parzystość funkcji:

a) $f(x) = x\cdot\sin x$ b) $f(x) = x^2\cdot\operatorname{tg}x$ c) $f(x) = \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$
d) $f(x) = 3\cdot\sin x\cdot\operatorname{tg}x$ e) $f(x) = 2\cdot\sin x - x$ f) $f(x) = 4x + \cos x$

5.91. Wykaż, że funkcja:
a) $f(x) = (\sin x - \cos x)^2 - 1$ jest nieparzysta,
b) $f(x) = x\cdot(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)$ jest parzysta.

5.92. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = \sin x + 2$ b) $f(x) = \cos(x - \pi) - 1$
c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 3$ d) $f(x) = 2 - \operatorname{ctg}^2 x$
e) $f(x) = \operatorname{tg}x\cdot\cos x$ f) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x\cdot\sin^2 x$.

5.93. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = \frac{3}{2}\cos x$ b) $f(x) = -5\cdot\sin x + 2$

c) $f(x) = 4\cdot\sin 2x - 1$ d) $f(x) = -0{,}5\cdot\cos 3x - 2$.

5.94. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = |3\cdot\sin x| - 1$ b) $f(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$

c) $f(x) = |\operatorname{tg}^2 x - 1|$ d) $f(x) = 2|\cos x| - 3$.

5.95. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = -\sin^2 x + 4\cdot\sin x + 12$ b) $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$
c) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - 2\cdot\operatorname{ctg}x - 3$ d) $f(x) = \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^2 x$

Wykresy funkcji trygonometrycznych

5.96. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in \langle -\pi, 2\pi\rangle$. Napisz równanie osi symetrii wykresu. Następnie odczytaj argumenty, dla których:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $f(x) = -1$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}$.

5.97. Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin x$, gdzie $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Na podstawie wykresu tej funkcji:

a) podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne,
b) zapisz przedziały monotoniczności tej funkcji,
c) ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby: $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{7}$, $\sin\frac{5\pi}{6}$, $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\pi$.

5.98. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Na podstawie wykresu tej funkcji podaj znak wyrażenia:

a) $\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{4\pi}{3}$ b) $\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{6}$

c) $\sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{5}$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) - \sin\frac{8\pi}{9}$

e) $\sin 1 - \sin 3$ f) $\sin 3 + \sin 5$.

5.99. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$, gdzie $x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$. Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji f. Następnie odczytaj z wykresu argumenty, dla których:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.100. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$, gdzie $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

a) Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.
b) Zapisz przedziały monotoniczności funkcji f.
c) Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby: $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos(-\pi)$

5.101. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\cos x$, gdzie $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$. Na podstawie wykresu tej funkcji podaj znak wyrażenia:

a) $\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{4}$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$

d) $\cos\frac{5\pi}{8}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}$

e) $\cos 1+\cos 3$

f) $\cos 2-\cos 3$.

5.102. We wspólnym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x)=\sin x$ oraz $g(x)=\cos x$, gdzie $x\in\langle-2\pi,2\pi\rangle$. Na podstawie tych wykresów:

a) wyznacz argumenty, dla których obie funkcje przyjmują tę samą wartość,

b) porównaj liczby $(\sin 109^\circ$ i $\cos 109^\circ)$ oraz $(\sin 271^\circ$ i $\cos 271^\circ)$,

c) wyznacz wartości funkcji $f(x)=\sin x$ dla tych argumentów, dla których funkcja $g(x)=\cos x$ przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$.

5.103. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\operatorname{tg}x$, gdzie $x\in\left\langle-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$. Na podstawie wykresu:

a) określ znak iloczynu $\operatorname{tg}(-113^\circ)\cdot\operatorname{tg}65^\circ\cdot\operatorname{tg}124^\circ$,

b) wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1,

c) podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od -1.

5.104. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\operatorname{ctg}x$, gdzie $x\in\left\langle-\frac{\pi}{2},0\right)\cup(0,\pi)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

Na podstawie tego wykresu:

a) uporządkuj malejąco liczby: $\operatorname{ctg}(-61^\circ)$, $\operatorname{ctg}265^\circ$, $\operatorname{ctg}3^\circ$, $\operatorname{ctg}178^\circ$,

b) podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość $-\sqrt{3}$,

c) wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od 1.

5.105. We wspólnym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x)=\operatorname{tg}x$ oraz $g(x)=\operatorname{ctg}x$, gdzie $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$. Następnie:

a) wypisz argumenty, dla których obie funkcje przyjmują tę samą wartość

b) podaj zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są większe od wartości funkcji f.

5.106. Naszkicuj wykres funkcji $y=\operatorname{tg}x$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Następnie skorzystaj z okresowości funkcji $f(x)=\operatorname{tg}x$ i wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których:

a) funkcja f przyjmuje wartość $\sqrt{3}$,

b) funkcja f przyjmuje wartość $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

c) funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

5.107. Naszkicuj wykres funkcji $y=\operatorname{ctg}x$ w przedziale $(0,\pi)$. Następnie skorzystaj z okresowości funkcji $f(x)=\operatorname{ctg}x$, gdzie $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ i wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których:

a) funkcja $f(x)=\operatorname{ctg}x$ przyjmuje wartość $-\sqrt{3}$,

b) funkcja f przyjmuje wartości dodatnie,

c) funkcja $f(x)=\operatorname{ctg}x$ przyjmuje wartości mniejsze od $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.108. Naszkicuj wykres funkcji $y=\sin x$ w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$. Następnie skorzystaj z okresowości funkcji $f(x)=\sin x$ i wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:

a) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1,

b) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) miejsca zerowe funkcji f,

d) przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

5.109. Naszkicuj wykres funkcji $y=\cos x$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$. Następnie skorzystaj z okresowości funkcji $f(x)=\cos x$ i wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:

a) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość -1,

b) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$,

c) miejsca zerowe funkcji,

d) przedziały, w których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

5.110. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y=\sin x+2$

b) $y=\operatorname{tg}x-3$

c) $y=-2\cdot\sin x$

d) $y=\frac{1}{2}\cos x$

e) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

f) $y=-\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

5.111. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = \sin|x|$

b) $y = |\cos x|$

c) $y = \left|\cos\left(x + \frac{2}{3}\right)\right|$

d) $y = \text{ctg}|x| + 1$

e) $y = \text{tg}\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$

f) $y = -|\sin x| - 2$

5.112. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = -\cos\frac{1}{2}x$, gdzie $x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$

b) $y = \sin(-2x)$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$

c) $y = \text{ctg}2x$, gdzie $x \in (-\pi, \pi) - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

d) $y = -\text{tg}\frac{1}{2}x$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$

5.113. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymasz przesuwając równolegle wykres funkcji:

a) $f(x) = \sin 2x$ o wektor $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{6}, 0\right]$

b) $f(x) = \cos 3x$ o wektor $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{4}, 0\right]$

c) $f(x) = \text{tg}\frac{-x}{2}$ o wektor $\vec{u} = \left[\frac{2\pi}{3}, 0\right]$

5.114. Dane są funkcje f i g. Podaj, o jaki wektor wzdłuż osi OX należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g.

a) $f(x) = \sin 3x$ $\quad g(x) = \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ $\quad g(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{3x}{2}\right)$ $\quad g(x) = \text{tg}\left(\frac{3x}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$

Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(-5, 12)$ należy do drugiego ramienia tego kąta. Zatem:

A. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ B. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ C. $\text{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ D. $\text{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$

2. Punkt P należy do drugiego ramienia kąta α w położeniu standardowym i jest punktem przecięcia się prostej k: $x = -3$ z prostą l: $y = -4x$. Zatem:

A. $\text{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ B. $\text{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ C. $\text{tg}\alpha = -4$ D. $\text{tg}\alpha = \frac{-1}{4}$

3. O kącie płaskim α wiadomo, że $\text{tg}\alpha < 0$ i $\sin\alpha < 0$. Zatem:

A. $\alpha \in (0°, 90°)$ B. $\alpha \in (90°, 180°)$ C. $\alpha \in (180°, 270°)$ D. $(270°, 360°)$

4. Jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$ i $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$, to:

A. $\text{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{5}{6}$ B. $\text{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{6}{5}$ C. $\text{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{6}{5}$ D. $\text{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{5}{6}$

5. Wartość wyrażenia $\sin^2(90° + 44°) - \cos^2 44°$ jest równa:

A. 0 B. $-2\cos^2 44$ C. -1 D. $-\frac{1}{2}$

6. Wyrażenie $\cos(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha) + 1$ jest równe:

A. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 1$ B. 2 C. $\cos^2\alpha + 1$ D. $\sin^2\alpha$

7. Wyrażenie $\text{tg}135° \cdot \cos 120°$ jest równe:

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

8. Jeśli $\alpha = 150°$, to:

A. $\sqrt{3} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha = 0$

B. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

C. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{4}$

D. $\frac{2 \cdot \sin\alpha + 1}{2 \cdot \cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

9. Jeśli α, β, γ są kątami trójkąta oraz $\alpha = 15°$, $\beta = 30°$, to:

A. $\cos\gamma = -\sqrt{2}\cdot\sin\beta$ B. $\cos\gamma = \sin(\alpha+\beta)$

C. $\cos\gamma = -0{,}5\cdot\text{ctg}(\alpha+\beta)$ D. $\sqrt{3}\cdot\cos\gamma = -\text{tg}2\beta$

10. Jeśli $\alpha \in (180°, 270°)$ i $\text{tg}\alpha = 5$, to:

A. $\sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{26}}$ B. $\sin\alpha = \frac{-5}{\sqrt{26}}$ C. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ D. $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. Na drugim ramieniu kąta α znajdującego się w położeniu standardowym leży punkt $P\left(-7\frac{1}{2}, 4\right)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

12. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta, znajdującego się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym, wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta równego 300°.

13. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α, wiedząc, że:

a) $\cos\alpha = -\frac{5}{8}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$ b) $\sin\alpha = \frac{3}{7}$

14. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α, wiedząc, że:

a) $\text{tg}\alpha = 1{,}5$ i $\cos\alpha < 0$ b) $\text{ctg}\alpha = -3$

15. Porównaj liczby: $a = \sin 135°$ oraz $b = \sin^3 150° + \sin 30°\cdot\cos^2 120°$.

16. Wyznacz miarę kąta α, $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\text{tg}\alpha < 0$ b) $\text{tg}\alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ i $\sin\alpha > 0$

17. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\text{tg}\alpha + \text{ctg}\alpha = 2{,}5$. Oblicz:

a) $\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha$ b) $\text{tg}^4\alpha + \text{ctg}^4\alpha$.

18. Kąt α jest kątem rozwartym oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz:

a) $\sin\alpha - \cos\alpha$ b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

19. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\text{tg}15°\cdot\text{tg}75°\cdot\text{tg}135°$ b) $\text{tg}120°\cdot\text{tg}130°\cdot\text{tg}140°$

D **20.** Wykaż, że:

a) $(\sin 15° + \cos 165°)^2 + 2\cdot\sin 75°\cdot\cos 75° = 1$

b) $(\sin 130° + \cos 50°)^2 - 2\cdot\sin 40°\cdot\cos 40° = 1$

D **21.** Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym i $\frac{3(\sin\alpha - 8\cdot\cos\alpha)}{4\cdot\cos\alpha - 5\cdot\sin\alpha} = 7$, to $\alpha = 45°$.

D **22.** Wykaż, że jeśli suma cosinusów wszystkich kątów trójkąta prostokątnego jest równa $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, to iloczyn sinusów tych kątów jest równy $\frac{2}{5}$.

D **23.** Wykaż, że jeśli $a = 3\sqrt[4]{9^{\cos 240°}}$ i $b = \left(\sqrt{\text{tg}210°}\right)^3$, to $a\cdot b = 1$.

D **24.** Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a) $(1+\sin\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\text{ctg}\alpha}\right) = \cos\alpha$

b) $(1-\cos\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\text{tg}\alpha}\right) = \sin\alpha$

D **25.** Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym i $2\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha = 4$, to $(\text{tg}\alpha + \text{ctg}\alpha)^2 = 4{,}5$.

D **26.** Wykaż, że jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$, to $(2|\cos\alpha|+1)(2\cos\alpha+1)+3 = 4\sin^2\alpha$.

27. Oblicz wartość wyrażenia: $\sin(-1320°)\cdot\text{tg}840° + \cos(-2100°)$.

28. Zapisz miarę kąta skierowanego α w radianach, jeśli:

a) $\alpha = 765°$ b) $\alpha = -306°$

29. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ b) $\text{tg}\alpha = -\sqrt{17}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

30. Oblicz $\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}$.

31. Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α wartość wyrażenia

$\left(\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{1-\sin\alpha}+\frac{1-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right)\cdot\sin(90^\circ-\alpha)$ jest stała.

32. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $y=2\cdot\sin\frac{\pi x}{2}$

b) $y=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

33. Zbadaj parzystość funkcji $f(x)=-\sin|x|$, gdzie $x\in\langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Odczytaj z wykresu argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Podaj dziedzinę funkcji $g(x)=f(2x)$ i naszkicuj jej wykres.

d) Odczytaj z wykresu funkcji g argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

34. Naszkicuj wykres funkcji $y=2\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, gdzie $x\in\langle -\pi, 2\pi\rangle$.

a) Odczytaj z wykresu zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.

b) Zapisz wszystkie argumenty, dla których funkcja $f(x)=2\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ określona w zbiorze $\mathbb{R}$ przyjmuje wartość 1.

c) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=|f(x)|$ i podaj jej okres podstawowy.

35. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, gdzie $x\in(-\pi, \pi)$.

a) Odczytaj z wykresu argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż 1.

b) Wykres funkcji f przesuń równolegle o wektor $\vec{u}=\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz.

6. Geometria analityczna

Odcinek w układzie współrzędnych

6.1. Oblicz długość odcinka AB, jeśli:

a) $A(3, 7)$, $B(-8, 7)$

b) $A(-5, -2)$, $B(-5, 7)$

c) $A(1, 9)$, $B(-7, -6)$

d) $A(10, 6)$, $B(4, 0)$

e) $A(\sqrt{5}+2, \sqrt{5})$, $B(1, -1)$

f) $A\left(3\frac{1}{3}, -5\right)$, $B\left(\frac{2}{3}, -3\right)$.

6.2. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, jeśli:

a) $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$

b) $A(-3, 1)$, $B(3, 5)$

c) $A(4, -1)$, $B(-10, 9)$

d) $A(\sqrt{2}, -3)$, $B(\sqrt{2}, 7)$.

6.3. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $ABCD$ i punkt P przecięcia się przekątnych. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku, jeśli:

a) $A(-3, 5)$, $B(-2, -1)$, $P(3, 1)$

b) $B(4, -2)$, $C(2, 7)$, $P(-1, 2)$.

Narysuj równoległobok $ABCD$ w układzie współrzędnych.

6.4. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne czwartego wierzchołka oraz współrzędne punktu P przecięcia przekątnych, jeśli:

a) $A(4, 1)$, $B(2, 6)$, $C(-8, 3)$

b) $A(-5, -2)$, $B(3, 1)$, $D(-2, 5)$.

Narysuj równoległobok $ABCD$ w układzie współrzędnych.

6.5. Oblicz długości przekątnych równoległoboku $ABCD$, jeśli:

a) $A(5, 1)$, $B(8, -3)$, $C(3, 9)$

b) $A(-4, -5)$, $B(5, -3)$, $D(-3, 3)$.

6.6. Oblicz długości boków równoległoboku $ABCD$, jeśli dane są dwa jego wierzchołki i punkt P przecięcia się przekątnych.

a) $A(4, -6)$, $B(9, -6)$, $P(7, -2)$

b) $A(-3, -5)$, $P(2, -1)$, $D(-1, 3)$

6.7. Dany jest trójkąt ABC, gdzie: $A(-4, -1)$, $B(4, 5)$, $C(2, 9)$. Oblicz długość środkowej:

a) AD b) BE c) CF.

6.8. Wyznacz współrzędne punktów podziału odcinka AB:

a) na cztery odcinki równej długości, jeśli $A(-5, -7)$, $B(3, 5)$,
b) na trzy odcinki równej długości, jeśli $A(2, -3)$, $B(-10, 3)$,
c) na sześć odcinków równej długości, jeśli $A(-1, 3)$, $B(5, 15)$.

6.9. Oblicz współrzędne punktu S przecięcia środkowych w trójkącie ABC, jeśli:

a) $A(0, 0)$, $B(9, 0)$, $C(0, 6)$
b) $A(-4, 0)$, $B(-2, -5)$, $C(0, 2)$
c) $A(-2, 7)$, $B(1, 2)$, $C(4, 0)$
d) $A(-4, -6)$, $B(2, -11)$, $C(5, 5)$.

6.10. W trójkącie ABC dane są wierzchołki: $A(-5, -2)$, $B(7, 4)$, $C(1, 7)$. Na bokach AB, BC i AC tego trójkąta zaznaczono odpowiednio punkty D, E, F w taki sposób, że $|AD| : |DB| = |BE| : |EC| = |CF| : |FA| = 1 : 2$. Oblicz współrzędne tych punktów.

D **6.11.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A(0,2)$, $B(6, -2)$, $C(7, 6)$ jest równoramienny.

D **6.12.** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A(-2,-3)$, $B(4, 1)$, $C(2, 4)$ jest prostokątny.

D **6.13.** Dane są punkty: $A(-2, 0)$, $B(3, 1)$, $C(4, 6)$, $D(-1, 5)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.

D **6.14.** Korzystając z własności wektorów wykaż, że jeśli $A(0, -1)$, $B(6, 1)$, $C(3, 5)$, $D(-3, 3)$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

D **6.15.** Korzystając z własności wektorów wykaż, że jeśli $A(-3, 4)$, $B(6, 1)$, $C(6, 4)$, $D(3, 5)$, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Równanie kierunkowe prostej

6.16. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A(2, -3)$, $B(6, 7)$ b) $A(-4, 1)$, $B(2, 7)$
c) $A\left(\frac{-3}{4},-1\right)$, $B\left(\frac{-1}{4},8\right)$ d) $A\left(\frac{1}{8},1\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{2}\right)$

6.17. Prosta k przechodzi przez punkt A, a jej współczynnik kierunkowy jest równy a. Wyznacz równanie kierunkowe prostej k.

a) $a = -3$ $A(5, 6)$ b) $a = 2$ $A(-10, 12)$
c) $a=\frac{1}{3}$ $A(-1, -9)$ d) $a=-\frac{3}{4}$ $A(24, -36)$

6.18. Napisz równanie kierunkowe prostej, przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A(-10, 58)$, $B(2, 22)$ b) $A(-8, -95)$, $B(4, 25)$
c) $A(-10, 7)$, $B(5, -3)$ d) $A(-6, -2)$, $B(24, 4)$

6.19. Dane jest równanie prostej k. Podaj miarę kąta nachylenia tej prostej do osi OX.

a) $k\colon y = x - 1$ b) $k\colon y=\sqrt{3}x+\sqrt{2}$ c) $k\colon y=1-\sqrt{3}x$
d) $k\colon y = -x + 2$ e) $k\colon y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{2}$ f) $k\colon y=-\frac{3-2\sqrt{3}x}{6}$

6.20. Dane są punkty A i B. Podaj, z dokładnością do jednego stopnia, miarę kąta nachylenia prostej AB do osi OX.

a) $A(-4, 2)$, $B(1, 8)$ b) $A(5, 6)$, $B(9, -4)$
c) $A(12, -3)$, $B(6, 15)$ d) $A(2, -3)$, $B(-1, -19)$

6.21. Wyznacz równanie kierunkowej prostej k, przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α.

a) $P(0, 0)$, $\alpha = 135^\circ$ b) $P(0, 6)$, $\alpha = 30^\circ$
c) $P(4, 0)$, $\alpha = 120^\circ$ d) $P(3, -4)$, $\alpha = 45^\circ$
e) $P\left(-2\sqrt{3},5\right)$, $\alpha = 60^\circ$ f) $P\left(\sqrt{6},\sqrt{8}\right)$, $\alpha = 150^\circ$

6.22. Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $A(-4, 3)$, $B(4, -5)$ i $C(8, 1)$. Wyznacz:

a) równania kierunkowe prostych, zawierających środkowe AD, BE i CF,
b) współrzędne punktu przecięcia tych prostych.

6.23. Wyznacz liczbę a wiedząc, że prosta m jest równoległa do prostej k.

a) $k\colon y = (2a - 3)x + 4$, $m\colon y = -4x + 7$
b) $k\colon y = 3x + a$, $m\colon y = 4 + (4 + a)x$
c) $k\colon y = (1 - a)x$, $m\colon y = (2a - 5)x - 9$
d) $k\colon y = 8$, $m\colon y = (a - 10)x + 7$

6.24. Dana jest prosta m: $y = -2x - 1$.

a) Napisz równanie prostej k, równoległej do prostej m i przechodzącej przez punkt $(-1, 5)$.

b) Naszkicuj obydwie proste w układzie współrzędnych.

c) Sprawdź algebraicznie, że proste k i m nie mają punktów wspólnych.

6.25. Napisz równanie kierunkowe prostej m, równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.

a) k: $y = 2$, $A(3, -5)$ b) k: $y = \frac{3}{4}x$, $A(-8, 3)$

c) k: $y = -2x + 5$, $A(-0,5; 4)$ d) k: $y = 0,125x - 1$, $A(16, 20)$

6.26. Wyznacz a wiedząc, że prosta k jest prostopadła do prostej m.

a) k: $y = 3x + 6$, m: $y = ax - 8$

b) k: $y = (-0,25a + 3)x + 2$, m: $y = 4x - 8$

c) k: $y = 5 + (4 - 2a)x$, m: $y = -\frac{2}{3}x + 11$

d) k: $y = -x + 3a\sqrt{5}$, m: $y = (2a - \sqrt{5})x - 19a$

6.27. Dane jest równanie prostej m: $y = 2x - 2$.

a) Napisz równanie prostej k, która jest prostopadła do prostej m i przechodzi przez punkt $(0, 3)$.

b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego tych prostych.

c) Naszkicuj proste k i m w układzie współrzędnych; następnie zaznacz ich wspólny punkt.

6.28. Napisz równanie kierunkowe prostej m, prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.

a) k: $y = -\frac{2}{3}x$, $A(-4, 1)$

b) k: $y = -x + 8$, $A(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

c) k: $y = 4x - 1$, $A(2, 9)$

d) k: $y = 0,75x + 3$, $A(6, -4)$

6.29. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-4, -2)$, $B(4, -1)$, $C(-2, 2)$.

a) Napisz równania kierunkowe prostych AB, BC, AC.

b) Czy trójkąt ABC jest prostokątny? Odpowiedź uzasadnij.

6.30. Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach A, B.

a) $A(-4, -1)$, $B(4, -3)$ b) $A(-4, -3)$, $B(2, 3)$

c) $A(0, 3)$, $B(4, -5)$ d) $A(1, -3)$, $B(7, 1)$

D **6.31.** Wykaż, że prosta k: $y = -3x + 5$ jest symetralną odcinka o końcach $A(-1, -2)$ i $B(5, 0)$.

D **6.32.** Dane są punkty $A(-5, -4)$, $B(1, -1)$, $C(-3, 2)$. Wykaż, że wysokość trójkąta ABC, poprowadzona z wierzchołka C, zawiera się w prostej k: $y = -2x - 4$.

D **6.33.** Dane są punkty: $A(-1, 2)$, $B(-6, -1)$, $C(5, 1)$, $D(10, 4)$. Korzystając z własności prostych, opisanych równaniami kierunkowym, wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

D **6.34.** Dane są punkty: $A(-1, -3)$, $B(5, 0)$, $C(3, 4)$, $D(-3, 1)$. Korzystając z własności prostych, opisanych równaniami kierunkowymi wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

D **6.35.** Dane są punkty: $A(-4, 1)$, $B(0, -2)$, $C(3, 2)$, $D(-1, 5)$. Korzystając z własności prostych, opisanych równaniami kierunkowymi wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

6.36. W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $A(-6, -2)$, środek $E(0, -1)$ boku AB oraz wektor $\overrightarrow{BC} = [-8, 4]$. Wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC.

6.37. W trójkącie ABC punkt $K(-5, 1)$ jest środkiem boku AC, zaś punkt L – środkiem boku BC. Wiedząc, że $\overrightarrow{AK} = [1, 6]$ oraz $\overrightarrow{KL} = [8, 4]$, wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC.

6.38. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbb{R}$, dla których prosta k jest równoległa do prostej m.

a) k: $y = |4 + p| \cdot x - 8$, m: $y = 3x + 2$

b) k: $y = x + 6p$, m: $y = |p - 5| \cdot x - 3p$

c) k: $y = 9 - |2 - p| \cdot x$, m: $y = 5$

6.39. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in R$, dla których prosta k jest prostopadła do prostej m.

a) $k: y = -0{,}2x - 1$, $m: y = |p-3| \cdot x + 3$

b) $k: y = x + 6p$, $m: y = 5 - |4-p| \cdot x$

c) $k: y = 3 + p - 4x$, $m: y = \frac{1}{8}|p+8|x - p^2$

Równanie ogólne prostej

6.40. Dane jest równanie prostej k. Przedstaw to równanie w postaci ogólnej.

a) $\frac{x}{3} = \frac{12-x}{3}$ b) $y = \frac{-x+5}{4}$ c) $y + \frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{3}$

6.41. Punkty A i B należą do prostej k. Wyznacz równanie ogólne prostej k.

a) $A(0, 8)$, $B(2, 4)$ b) $A(3, -4)$, $B(11, -4)$

c) $A(-3, 2)$, $B(4, 9)$ d) $A(-2, 6)$, $B(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

6.42. Do prostej należą punkty P i Q. Korzystając z równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, wyznacz równanie ogólne tej prostej.

a) $P(0, -4)$, $Q(3, 1)$ b) $P(\sqrt{5}, -3)$, $Q(\sqrt{5}, 8)$

c) $P(2, 2)$, $Q(-1, 0)$ d) $P(3, 1)$, $Q(-1, -7)$

6.43. Dane jest równanie ogólne prostej. Podaj miarę kąta, jaki tworzy ta prosta z osią OX.

a) $x + y - 7 = 0$ b) $\sqrt{3}x - y + 90 = 0$ c) $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$

d) $\sqrt{3}x - 3y + 15 = 0$ e) $x - \sqrt{3} = 0$ f) $3y - \sqrt{3} = 0$

6.44. Dane są równania ogólne prostych k i m. Czy proste k i m są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $k: 2x - 3y + 6 = 0$, $m: -x + 1\frac{1}{2}y - 2 = 0$

b) $k: 3x - 4 = 0$, $m: 2y + 5 = 0$

c) $k: 7x + 21y - 3 = 0$, $m: x - 3y - 1 = 0$

d) $k: 2x + 7 = 0$, $m: 3x - 5 = 0$

6.45. Napisz równanie ogólne prostej m równoległej do prostej:

a) $k: 3x - 2y + \sqrt{3} = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-1, 1)$

b) $k: 4x + 9y = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie $P(0, 5)$

c) $k: 2x - 11 = 0$ i przecinającej oś OX w punkcie $P(-4, 0)$

d) $k: y - 5 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(7, \sqrt{2})$.

6.46. Dane są równania ogólne prostych k i m. Czy proste k i m są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $k: 5x + 3y - 2 = 0$ $m: -15x + 25y + 10 = 0$

b) $k: 5x + 7 = 0$ $m: 3y - 2 = 0$

c) $k: 4x - 20y + 30 = 0$ $m: 15x - 3y - 2 = 0$

d) $k: -\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$ $m: 1{,}5x - 1\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{5} = 0$

6.47. Napisz równanie ogólne prostej m prostopadłej do prostej:

a) $k: 5x - y + 3 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-1, 2)$

b) $k: y + 4 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$

c) $k: 10x - 7 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(3, 8)$

d) $k: -3x + 2y = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie $P(0, -2)$.

6.48. Oblicz brakujące współczynniki w równaniu ogólnym prostej m, wiedząc, że:

a) prosta $m: Ax - 2y + C = 0$ jest równoległa do prostej $k: 5x + 14y - 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $P(7, 0)$

b) prosta $m: x + By + C = 0$ jest równoległa do prostej $k: -3x + 4y - 5 = 0$ i przechodzi przez punkt $P(1, -3)$

c) prosta $m: 3x + By + C = 0$ jest prostopadła do prostej $k: -20x + 15y - 7 = 0$ i przechodzi przez początek układu współrzędnych

d) prosta $m: Ax + y + C = 0$ jest prostopadła do prostej $k: 2x + 4y - 13 = 0$ i przechodzi przez punkt $P\left(\frac{1}{2}, 7\right)$.

6.49. Wyznacz równanie ogólne symetralnej odcinka AB.

a) $A(-4, 5)$, $B(6, 1)$ b) $A(0, 7)$, $B(0, -3)$

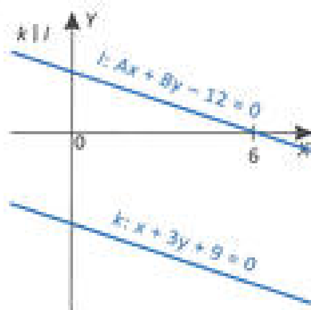
c) $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ d) $A(-1, 8)$, $B(-5, 8)$

6.50. Wyznacz liczbę a, dla której proste k: $3ax + 4y - 8 = 0$ oraz m: $(a + 3)x + 2y - 9 = 0$ są równoległe.

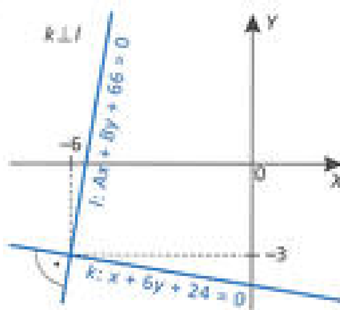
6.51. Wyznacz liczbę a, dla której proste k: $-ax + (3 - a)y + 6 = 0$ oraz m: $(a + 1)x + y + 2 = 0$ są prostopadłe.

6.52. Na podstawie danych na rysunku poniżej wyznacz współczynniki A, B w równaniu ogólnym prostej l.

a)



b)



Równanie okręgu

6.53. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r w postaci kanonicznej.

a) $S(0, 0)$, $r = 3$ b) $S(0, -2)$, $r = \sqrt{5}$ c) $S(4, 0)$, $r = 2{,}5$

d) $S(-3, 1)$, $r = \sqrt{2}$ e) $S(3, -2)$, $r = \frac{1}{3}$ f) $S(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$, $r = 4$

6.54. Poniższe równania opisują okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Podaj współrzędne punktu S i promień tego okręgu.

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = 2{,}25$

c) $(1 + x)^2 + (2 - y)^2 = 25$ d) $(-x - 3)^2 + (-1 - y)^2 = 81$

6.55. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu opisanego równaniem:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 33 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y - 6 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$

6.56. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu opisanego równaniem:

a) $x^2 + y^2 - x - 0{,}5y - \frac{59}{16} = 0$ b) $x^2 + y^2 - \sqrt{8}y - 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0$ d) $x^2 + y^2 - 3x + y - 1{,}5 = 0$

6.57. Czy równanie $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$ opisuje okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

6.58. Dane jest równanie okręgu oraz punkty A, B, C. Sprawdź algebraicznie, które z tych punktów należą do okręgu. Następnie narysuj okrąg w układzie współrzędnych i zaznacz punkty A, B, C.

a) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $A(-1, 7)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 6)$

b) $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 16 = 0$, $A(-4, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(-5, -1)$

6.59. Punkt A należy do okręgu o środku w punkcie S. Napisz równanie tego okręgu.

a) $S(0, 0)$, $A(3, 4)$ b) $S(2, 1)$, $A(4, 2)$

c) $S(-3, 2)$, $A(3, 10)$ d) $S(-2, 1)$, $A(4, 7)$

6.60. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory:

$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0\}$

$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0\}$,

a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A \cap B$.

6.61. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B, jeśli jego środek należy do prostej k.

a) $A(5, 10)$, $B(3, 12)$, k: $y = -2x - 2$ b) $A(6, 4)$, $B(-1, 3)$, k: $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

c) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$, k: $y = 2x + 4$ d) $A(7, 4)$, $B(-5, -12)$, k: $y = x - 5$

6.62. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C, jeśli:

a) $A(-1, 0)$, $B(7, 0)$, $C(0, 1)$ b) $A(1, 3)$, $B(5, 1)$, $C(4, 4)$

c) $A(1, 5)$, $B(8, -2)$, $C(9, 1)$ d) $A(-14, -1)$, $B(3, 16)$, $C(11, 4)$

D **6.63.** Udowodnij, że jeśli $a \neq b$, to równanie $x^2 + y^2 - ax + 2by - 0{,}75a^2 + 2ab = 0$ opisuje okrąg. Podaj współrzędne środka S i promień r okręgu.

Wyznaczanie w układzie współrzędnych punktów wspólnych prostych, okręgów i parabol

6.64. Rozwiąż algebraicznie układ równań i przedstaw jego interpretację graficzną.

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ y=x^2-6x+9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ y=-2(x-1)^2+6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=-0{,}5x^2-2x+3 \\ -2x+y=11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x \\ -5x+2y=-4 \end{cases}$

6.65. Rozwiąż algebraicznie układ równań i przedstaw jego interpretację graficzną.

a) $\begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2=8 \\ x-2=y \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+1)^2=16 \\ x+y=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+3)^2+(y-2)^2=17 \\ 5x+3y=-26 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+3)^2+(y+2)^2=8 \\ 4x+y=-2 \end{cases}$

6.66. Przedstaw interpretację graficzną danego układu równań w układzie współrzędnych. Następnie rozwiąż ten układ algebraicznie.

a) $\begin{cases} 3x+y=-13 \\ y=x^2+6x+7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+8=0 \\ x+3y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1=0 \\ y=2x-5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y+x^2+8x=-14 \\ y=4x+22 \end{cases}$

6.67. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych (o ile istnieją) prostej k i okręgu o.

a) $k\colon y=\frac{1}{3}x-1$, $o\colon x^2+y^2=9$
b) $k\colon y=1$, $o\colon (x+5)^2+y^2=1$
c) $k\colon x+y=-x-8$, $o\colon x^2+y^2+6x+2y=0$
d) $k\colon x+2y+4=0$, $o\colon x^2+y^2+8x+4y+19=0$

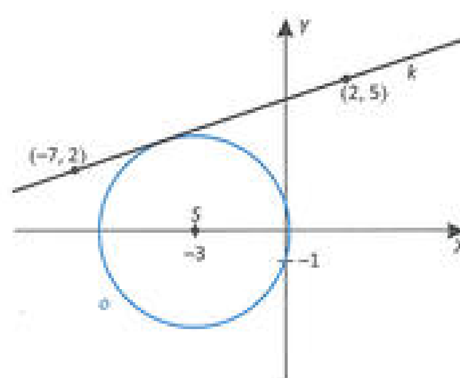
Czy prosta k jest sieczną okręgu, jest rozłączna z okręgiem, czy jest styczną do tego okręgu?

6.68. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych (o ile istnieją) prostej k i paraboli p.

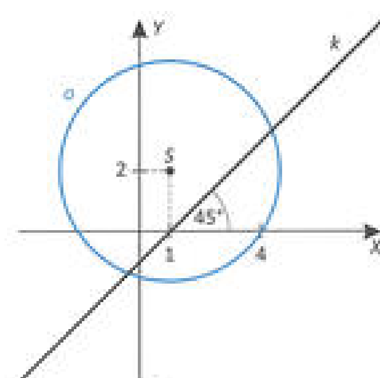
a) $k\colon x+y=0$, $p\colon y=x^2-2$
b) $k\colon y=x+3$, $p\colon y=-2x^2+8x-4$
c) $k\colon x-2y+7=0$, $p\colon y=\frac{1}{2}(x+1)^2$
d) $k\colon 2x-y-11=0$, $p\colon y=x^2-6x+5$

6.69. Zapisz równania dwóch krzywych znajdujących się na rysunku poniżej. Następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych tych krzywych, wiedząc, że rysunek przedstawia:

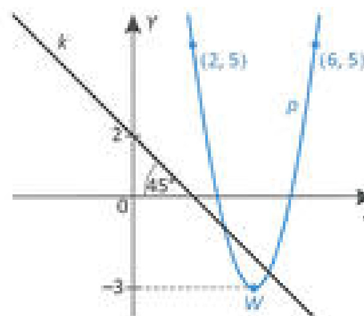
a) okrąg o środku S i prostą k



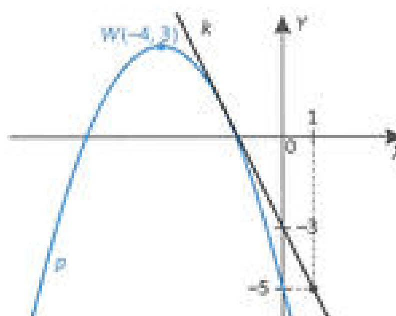
b) okrąg o środku S i prostą k



c) parabolę p i prostą k



d) parabolę p i prostą k



6.70. Przedstaw w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają równanie:

a) $y^2-x^2=0$ b) $y^2=(x+3)^2$ c) $(x+1)^2+(y-2)^2=0$
d) $x^2+16y^2=8xy$ e) $2x^2=xy$ f) $4(x+1)^2-(y-1)^2=0$

6.71. Rozwiąż algebraicznie układ równań. Następnie przedstaw jego interpretację graficzną w układzie współrzędnych.

a) $\begin{cases} x^2+y^2-6y+5=0 \\ x^2+y^2-6x-6y+17=0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+9=0 \\ x^2+y^2+2x-2y-3=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+8x-4y+16=0 \\ x^2+y^2+2x+2y-8=0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x^2+y^2-10x-4y-7=0 \\ x^2+y^2-6x-8y+24=0 \end{cases}$

6.72. Rozwiąż algebraicznie układ równań. Następnie przedstaw jego interpretację graficzną w układzie współrzędnych.

a) $\begin{cases} (2x-y+8)(x+2y+9)=0 \\ x^2+y^2+4x+2y-5=0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=0,5x^2-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=5 \\ y=-x^2+5 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-11=0 \\ 4x^2-y^2=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3y^2+2xy=9y \\ y=x^2-4x+4 \end{cases}$
f) $\begin{cases} y+x^2+3x=0 \\ (y-1)^2=(2x+3)^2 \end{cases}$

Zastosowanie układów równań do rozwiazywania zadań z geometrii analitycznej

6.73. Dane są punkty $A(-6, 3)$ oraz $B(0, 5)$. Na prostej k: $x - 2y + 4 = 0$ wyznacz współrzędne punktu C, który jest równoodległy od punktów A i B.

6.74. Dane są punkty: $A(0, 2)$, $B(2, 4)$, $C(6,2)$. Wyznacz:
a) równania symetralnych odcinków AB i BC,
b) współrzędne punktu przecięcia się tych symetralnych,
c) odległość punktu przecięcia się tych symetralnych od punktów A, B, C.

6.75. Boki trójkąta zawierają się w prostych: k: $x - 3y + 5 = 0$, l: $x + 2y + 5 = 0$, m: $3x + y - 5 = 0$.
D a) Wykaż, że trójkąt jest prostokątny.
b) Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

6.76. Dane są punkty $A(-4, -2)$, $B(3, -1)$, $C(2, 4)$, $D(-3, 3)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych tego czworokąta.

6.77. Prosta k: $y = -3x + 8$ przecina okrąg o środku w punkcie $(1, 0)$ i promieniu 5 w punktach A i B. Oblicz:
a) współrzędne punktów A i B
b) długość cięciwy AB.

6.78. Prosta k: $x - y + 1 = 0$ przecina parabolę p: $y = -0,5x^2 + 5$ w punktach A i B. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB.

6.79. Punkty $A(-4, 0)$, $B(4, 4)$, $C(-5, 7)$ są wierzchołkami trójkąta. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta. Oblicz:
a) współrzędne punktu D
b) długość wysokości CD.

6.80. Punkty $A(-4, 3)$, $B(2, 0)$, $C(2, 5)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz:
a) równania prostych, zawierających wysokości poprowadzone z wierzchołków A i C,
b) punkt przecięcia się wysokości trójkąta (ortocentrum).

6.81. Dany jest okrąg o: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$.
D a) Wykaż, że prosta k: $y - 6 = 0$ jest styczna do okręgu. Oblicz współrzędne punktu styczności.
b) Wyznacz na stycznej punkty, których odległość od środka okręgu jest równa 5. Oblicz odległość tych punktów od punktu styczności.

6.82. Dana jest parabola p: $y = x^2 - 3$.
a) Wyznacz współrzędne punktów A i B, będących punktami przecięcia się paraboli p z prostą k: $x - y + 3 = 0$.
b) Wyznacz współrzędne punktów C i D, będących punktami przecięcia się paraboli p z prostą m: $y + 2x = 0$.
D c) Wykaż, że odcinki AB i CD przecinają się w środku odcinka CD.

6.83. Dany jest okrąg o: $x^2 + y^2 - 6y = 0$ oraz punkt $A(0, 6)$.
D a) Wykaż, że punkt A należy do okręgu o.
b) Wyznacz równanie prostej k, nachylonej do osi OX pod kątem $60°$ i przechodzącej przez punkt A.
c) Oblicz współrzędne punktu B, będącego drugim punktem przecięcia prostej k z danym okręgiem.
d) Wyznacz na okręgu punkt C tak, aby trójkąt ABC był równoboczny.

6.84. Punkty A, B, C należą do paraboli p: $y=\frac{1}{4}(x-4)^2$ i są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Wiedząc, że punkt C jest wierzchołkiem paraboli oraz $|\sphericalangle ACB| = 120°$, wyznacz współrzędne punktów A, B, C.

6.85. Punkty $A(1, -1)$, $B(3, 5)$ i $C(-7, 11)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

6.86. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A(1, 7)$, $B(-5, 1)$, $C(7, -5)$, od środka ciężkości tego trójkąta.

6.87. Dany jest punkt $C(0,5)$ oraz prosta k: $x - 4y + 8 = 0$. Wyznacz na prostej k punkty A i B tak, aby $|AC| = |BC| = 4\sqrt{2}$.

6.88. Dane jest równanie sumy dwóch prostych: $x^2 - 9y^2 = 0$, w których zawierają się przekątne prostokąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta wiedząc, że długość przekątnych jest równa 10.

6.89. Dane są punkty $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$. Wyznacz na prostej k: $3x - 2y = 0$ punkt C taki, że $|\sphericalangle ACB| = 90°$.

6.90. Dane są dwa wierzchołki trójkąta ABC: $A(-4, -1)$, $B(4, -1)$. Wysokość AD trójkąta ABC zawiera się w prostej k: $x - 2y + 2 = 0$.

a) Wyznacz współrzędne punktu D.

b) Wiedząc dodatkowo, że $|AB| = |AC|$, oblicz współrzędne punktu C.

6.91. Jedna z przekątnych kwadratu $ABCD$ zawiera się w prostej k: $2x - y = 0$. Wiedząc, że $A(1, -3)$, wyznacz współrzędne wierzchołków B, C, D.

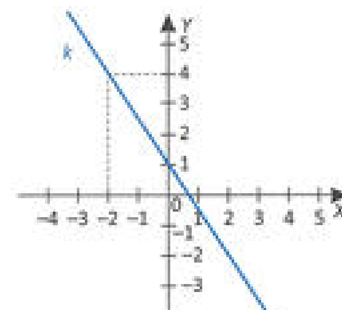
Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Dane są trzy kolejne wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A(2, -2)$, $B(4, 2)$, $C(-2, 3)$. Wówczas wierzchołek D ma współrzędne:

A. $(0, 7)$ B. $(-4, -1)$ C. $(8, -3)$ D. $(-5, 0)$

2. Prostą k na rysunku poniżej można opisać równaniem kierunkowym $y = ax + b$. Wówczas:

A. $a = -2$ B. $a = -1,5$ C. $a = -1$ D. $a = 1$



3. Do prostej k należą punkty: $(-1, 2)$, oraz $(-1, -4)$. Zatem prostą k opisuje równanie:

A. $y = 2x - 4$ B. $y + 1 = 0$ C. $x + 1 = 0$ D. $-x + 2y - 4 = 0$

4. Wskaż równanie prostej, równoległej do prostej k: $2x - y + 4 = 0$.

A. $-4x + 2y = 0$ B. $2x + y - 4 = 0$ C. $2x + 4 = 0$ D. $x + 2y + 4 = 0$

5. Wskaż równanie prostej, prostopadłej do prostej k: $y = 4x - 1$.

A. $y = 4x + 1$ B. $y = -4x - 1$ C. $y = 0,25x + 1$ D. $y = -0,25x - 1$

6. Równanie $y^2 = 4 - (x - 3)^2$ opisuje:

A. okrąg o środku w punkcie $(-3, 0)$ i promieniu 4

B. okrąg o środku w punkcie $(3, 0)$ i promieniu 2

C. parabolę, której wierzchołkiem jest punkt $(3, 4)$

D. sumę dwóch prostych: $y = -x + 5$ oraz $y = x - 1$

7. Proste k: $-2x + y - 3 = 0$ oraz m: $3x - y + 2 = 0$ przecinają się w punkcie o współrzędnych:

A. $(1, 5)$ B. $(-2, 3)$ C. $(5, 13)$ D. $(-1, 1)$

8. Kąt nachylenia prostej k: $\sqrt{3}x + 3y - 1 = 0$ do osi OX jest równy:

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

9. Wskaż równanie ogólne prostej, której nie można opisać równaniem kierunkowym.

A. $y + 5 = 0$ B. $x - \sqrt{2} + 1 = 0$ C. $2x + \sqrt{3}y = 0$ D. $2y - \sqrt{5} + 2 = 0$

10. Dane są punkty $A(-3, 4)$, $B(6, 7)$. Punkt P należy do odcinka AB oraz $|AP| : |PB| = 1 : 2$. Zatem:

A. $P(3, 6)$ B. $P\left(1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$ C. $P(0, 5)$ D. $P\left(-1, 4\frac{2}{3}\right)$

11. Wskaż równanie prostej, prostopadłej do prostej k: $x - 2y + 4 = 0$ i przechodzącej przez punkt $(0, 3)$.

A. $4x + 2y - 6 = 0$ B. $2x + y + 3 = 0$
C. $x + 2y - 3 = 0$ D. $0{,}5x + y - 3 = 0$

12. Dane jest równanie okręgu: $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$. Promień tego okręgu jest równy:

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 6 D. $4\sqrt{2}$

13. Odległość punktu $A(-2, 1)$ od środka okręgu o: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$ jest równa:

A. $\sqrt{17}$ B. 3 C. $2\sqrt{5}$ D. 5

14. Układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = \sqrt{2} \end{cases}$:

A. ma jedno rozwiązanie B. ma dwa rozwiązania
C. nie ma rozwiązań D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

15. Prosta k: $y = 2x + 1$ przecina parabolę p: $y = (x-1)^2$ w punktach A i B. Środek odcinka AB ma współrzędne:

A. $(0, 5)$ B. $(2, 5)$ C. $(1, 3)$ D. $(1, 5)$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

16. Punkt $S(2, 1)$ jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, a punkt $D(1, 3)$ jest środkiem odcinka AB. Oblicz współrzędne punktu C.

D **17.** Dane są punkty: $A(-3, -1)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 7)$, $D(-5, 2)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

D **18.** Dane są punkty: $A(-6, 1)$, $B(3, -2)$, $C(4, 1)$, $D(-5, 4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

D **19.** Dane są punkty: $A(-6, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(-4, 4)$. Wykaż, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.

20. Wyznacz równanie:

a) prostej, równoległej do prostej k: $2x - 3y + 1 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-17, 2)$,

b) prostej, prostopadłej do prostej k: $-x + 5y - 7 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-3, 11)$.

21. Wyznacz równanie prostej, nachylonej do osi OX pod kątem α i przechodzącej przez punkt P, jeśli:

a) $\alpha = 30°$, $P(\sqrt{3}, -1)$ b) $\alpha = 120°$, $P(-\sqrt{6}, \sqrt{8})$ c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $P(9, -1)$

22. Wyznacz równanie ogólne prostej, do której należą punkty:

a) $A(5, -6)$, $B(-2, 8)$ b) $A(-3, 9)$, $B(-3, 12)$

23. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeśli $A(-2, 0)$, $B(7, 3)$.

24. Dane są proste k: $ax + 2y - 4 = 0$ oraz m: $8x + ay - 12 = 0$. Wyznacz liczbę a, dla której te proste:

a) są równoległe b) są prostopadłe.

Sprawdź, czy dla wyznaczonej liczby a istnieje postać kierunkowa równania prostej k i równania prostej m.

25. Doprowadź równanie okręgu o: $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 0{,}5 = 0$ do postaci kanonicznej. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

D **26.** Dane są punkty: $A(-4, -5)$, $B(2, -5)$, $C(-2, -1)$. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC ma współrzędne $(-1, -4)$, a jego promień jest równy $\sqrt{10}$.

27. Dane są punkty $A(-4, 0)$, $B(2, -2)$ oraz prosta k: $x + y - 6 = 0$. Wyznacz na prostej k punkt C tak, aby $|AC| = |BC|$.

28. Dany jest punkt $C(-4, 4)$ oraz prosta k: $x - 5y + 11 = 0$. Wyznacz na prostej k punkty A i B spełniające warunek: $|AC| = |BC| = \sqrt{13}$.

29. Dane są punkty: $A(-2, 6)$, $B(-4, 0)$. Wyznacz na osi OY punkt C taki, że $|\sphericalangle ACB| = 90°$.

30. Prosta k: $y = 3 - x$ przecina parabolę p: $y = x^2 + 6x + 9$ w punktach A i B.

a) Oblicz współrzędne punktów A i B.

D b) Wykaż, że oś symetrii paraboli przecina odcinek AB w punkcie, który dzieli ten odcinek w stosunku 3 : 2.

31. Rozwiąż dany układ algebraicznie. Następnie przedstaw ilustrację graficzną tego układu.

a) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x^2 - 4x + 1 \end{cases}$

32. Rozwiąż dany układ algebraicznie. Następnie przedstaw ilustrację graficzną tego układu.

a) $\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 9 \\ 4y^2 = (x+2)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$

33. Proste k: $y = x$ oraz m: $y = -x + 8$ przecinają się w punkcie A, należącym do paraboli p: $y = a(x-2)^2$.

a) Oblicz współrzędne punktu A oraz współczynnik a.

b) Każda z prostych k i m przecina parabolę p w drugim punkcie: prosta k w punkcie B, prosta m w punkcie C. Oblicz współrzędne tych punktów.

c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

34. Punkt wspólny prostych k: $y = 2x + 1$ oraz m: $y = -2x + 1$ jest punktem przecięcia się przekątnych prostokąta $ABCD$. Wiedząc, że przekątne prostokąta mają długość 10, oblicz współrzędne jego wierzchołków.

35. Dwa okręgi o_1: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ oraz o_2: $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 23 = 0$ przecinają się w punktach A i B.

a) Oblicz współrzędne tych punktów.

D b) Wykaż, że cosinus kąta nachylenia prostej AB do osi OX jest równy $-0{,}6$.

7. Geometria płaska – rozwiązywanie trójkątów, pole trójkąta, pole koła

Twierdzenie sinusów

7.1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli:

a) $|AC| = 3$ oraz $|\sphericalangle CBA| = 60°$

b) $|BC| = 4$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 150°$

c) $|\sphericalangle A| = 72°$, $|\sphericalangle B| = 63°$, $|AB| = \sqrt{8}$

d) $|\sphericalangle B| + |\sphericalangle C| = 150°$, $|BC| = 13$.

7.2. W trójkącie ABC kąty są odpowiednio równe α, β, γ, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R. Oblicz:

a) długość boku AB, jeśli $\alpha = 28°$, $\beta = 32°$ oraz $R = 8$ cm,

b) długość boku AC, jeśli $\alpha = 65°$, $\gamma = 83°$ oraz $R = 10$ cm.

7.3. W trójkącie ABC kąty są odpowiednio równe α, β, γ. Oblicz:

a) długość boku AC, jeśli $\alpha = 48°$, $\gamma = 70°$, $|BC| = 5$ cm,

b) długość boku AB, jeśli $\alpha = 17°$, $\gamma = 32°$, $|AC| = 7{,}55$ cm.

7.4. W trójkącie kąty są odpowiednio równe α, β, γ, a boki naprzeciw kątów mają odpowiednio długość a, b, c. Oblicz:

a) b, jeśli: $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ i $\cos\beta = \frac{3}{5}$ oraz $a = 8$ cm,

b) c, jeśli: $\cos\alpha = -0{,}174$ i $\cos\gamma = 0{,}719$ oraz $a = 19{,}7$ cm.

7.5. W trójkącie ABC bok AB ma długość c, zaś kąty trójkąta przylegające do boku AB są równe α i β. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli:

a) $c = 8$ cm i $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$

b) $c = 13{,}5$ cm i $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{4}$

c) $c = 20$ cm i $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{13}$

d) $c = 15$ cm i $\cos(\alpha + \beta) = \frac{8}{17}$

7.6. Boki trójkąta leżące naprzeciw kątów α, β, γ mają odpowiednio długość a, b, c. Na trójkącie opisano okrąg o promieniu R. Oblicz:

a) R, jeśli $\operatorname{tg}\gamma = \frac{-3}{4}$, $c = 6$ cm,

b) a, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $c = 17$ cm,

c) c, jeśli $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = 9{,}66$ cm,

d) b, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = 19{,}32$ cm.

7.7. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 3\sqrt{3}$, $|BC| = 3$ oraz $|\sphericalangle A| = 30°$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

7.8. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 12$, $|BC| = 6\sqrt{2}$ oraz $|\sphericalangle A| = 30°$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

7.9. W trójkącie równoramiennym rozwartokątnym najdłuższy bok ma długość 6. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $2\sqrt{3}$, oblicz:

a) miary kątów trójkąta

b) obwód tego trójkąta.

7.10. W trójkącie rozwartokątnym ABC dane są długości boków: $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|BC| = 3 - \sqrt{3}$, $|AC| = 2\sqrt{3}$. Wyznacz:

a) miarę kąta ACB,

b) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

D **7.11.** Wykaż, że jeśli dwa kąty trójkąta mają po 30°, to długość dwóch boków tego trójkąta jest równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

D **7.12.** Dane są dwa trójkąty ABC oraz $A_1B_1C_1$ takie, że $\alpha = \alpha_1$ oraz $\beta + \beta_1 = 180°$. Wykaż, że $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|}$.

D **7.13.** Wykaż, że jeśli promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy długości jednego z boków trójkąta, to kąt trójkąta leżący naprzeciw tego boku ma miarę 30° lub 150°.

Twierdzenie cosinusów

7.14. Dane są długości boków a i b oraz kąt miedzy tymi bokami równy γ. Oblicz długość trzeciego boku, jeśli:

a) $a = 3$, $b = 9$, $\gamma = 120°$

b) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 6$, $\gamma = 45°$.

7.15. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm. Oblicz cosinusy kątów tego trójkąta. Czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

7.16. Dane są długości boków trójkąta. Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. Podaj miarę największego kąta tego trójkąta.

a) $a = 10$ cm, $b = 9$ cm, $c = 5$ cm

b) $a = 4$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm

c) $a = 2\sqrt{2}$ cm, $b = \sqrt{26}$ cm, $c = 3\sqrt{2}$ cm

7.17. Długości boków trójkąta ABC są równe: $|AB| = \sqrt{14}$ cm, $|AC| = 3\sqrt{2}$ cm oraz $|BC| = \sqrt{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta przy wierzchołku C.

7.18. Boki trójkąta ABC mają długość: $|BC| = 5$, $|AB| = 2\sqrt{2} - 1$ oraz $|AC| = 2\sqrt{2} + 1$. Oblicz miarę kąta przy wierzchołku A.

7.19. Boki równoległoboku mają długość a i b, a kąt ostry jest równy γ. Oblicz długość przekątnych tego równoległoboku, jeśli:

a) $a = 4$ cm, $b = 3\sqrt{2}$ cm, $\gamma = 45°$

b) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 30°$.

7.20. Dwa boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 8$ cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle C| = 60°$, oblicz długość boku AC.

7.21. W trójkącie ABC dwa boki mają długość: $|AB| = 2$ cm i $|AC| = 4$ cm, a sinus kąta BAC jest równy $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

D a) Wykaż, że jeśli kąt BAC jest ostry, to trójkąt ABC jest równoramienny.

b) Oblicz długość boku BC w przypadku, gdy $|\sphericalangle BAC| \in (90°, 180°)$.

7.22. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm oraz $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

7.23. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 4$, $|BC| = |AB| - 2$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

7.24. W trójkącie ABC bok AC jest o 6 cm dłuższy od boku AB oraz $|BC| = 5\sqrt{2}$ cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle ABC| = 135°$, oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

7.25. W trójkącie ABC boki mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 2\sqrt{21}$ cm i $|AC| = 8$ cm. Oblicz długości środkowych CD i BE.

7.26. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 15$ cm oraz $|AC| = 12$ cm. Oblicz:
a) długość środkowej CD,
b) promień okręgu opisanego na trójkącie ADC.

7.27. Dwa boki trójkąta ABC mają długość: $|AC| = 10$ cm, $|BC| = 6$. Wiedząc, że $|\sphericalangle ACB| = 60°$, oblicz długość środkowej CD.

D **7.28.** W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC, $|AC| = |AB|$, poprowadzono środkowe CD i BE, które przecięły się w punkcie M. Wykaż, że $\cos|\sphericalangle DMB| = \frac{4}{5}$.

D **7.29.** Na boku BC trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt P taki, że $|BP| = \frac{1}{2}|PC|$. Wykaż, że cosinus kąta PAC jest równy $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania zadań

7.30. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 10$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 8,5.

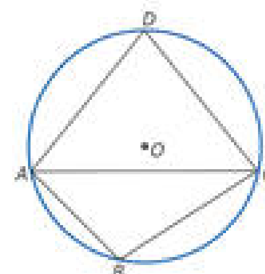
7.31. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym:
a) $|AC| = 72$, $|BC| = 73$, $|\sphericalangle A| = 49°$
b) $|AC| = 72$, $|BC| = 70$, $|\sphericalangle A| = 49°$.

7.32. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym:
a) $|BC| = 178$, $|AC| = 89$, $|\sphericalangle B| = 30°$
b) $|BC| = 160$, $|AC| = 89$, $|\sphericalangle B| = 30°$.

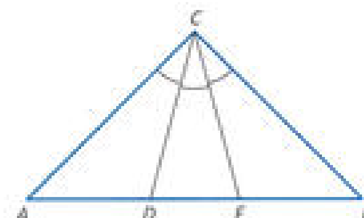
D **7.33.** Wykaż, że nie istnieje trójkąt ABC, w którym $|BC| = 179$, $|AC| = 89$, $|\sphericalangle B| = 30°$.

7.34. Boki trójkąta mają długość a, b, c, kąty są odpowiednio równe α, β, γ, a R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli:
a) $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $\beta = 45°$
b) $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $\alpha = 45°$
c) $R = c = 5$, $\alpha = 60°$
d) $R = 3$, $a = \sqrt{27}$, $\beta = 45°$, $c < b$.

7.35. Na rysunku obok punkty A, B, C, D należą do okręgu o środku O oraz $|AD| = |DC|$. Wiedząc, że $|BC| = 8$, $|AC| = |AB| + 6$ i $|\sphericalangle ABC| = 120°$, oblicz obwód czworokąta $ABCD$.



7.36. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC przyprostokątne mają długość: $|AC| = |BC| = \sqrt{2}$. Punkty D, E należą do przeciwprostokątnej AB oraz $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ECB|$. Oblicz długości odcinków AD, DE, EB.



D **7.37.** Wykaż, że jeśli α, β są miarami dwóch kątów trójkąta, a R – promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, to obwód trójkąta jest równy $2R[\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)]$.

D **7.38.** Boki trójkąta mają długość a, b, c, a kąty są odpowiednio równe α, β, γ. Wykaż, że jeśli $a : b : c = 4 : 5 : 6$, to $\cos\beta = \cos^2\alpha$.

D **7.39.** W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle BDC| = 60°$, to $|AC|^2 - |BC|^2 = |AB| \cdot |CD|$.

D **7.40.** Kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α, β, γ. Wykaż, że jeśli $\frac{|BC|}{|AC|} = \sqrt{2}$, to $2\cos^2\beta - \cos^2\alpha = 1$.

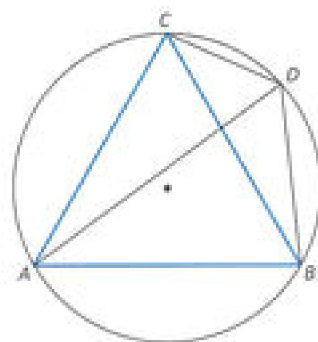
D 7.41. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.

D 7.42. W trójkącie ABC dane są kąty: $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBA| = \beta$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

D 7.43. W trójkącie boki mają długość a, b, c, a kąty są odpowiednio równe α, β, γ. Wykaż, że jeśli $a \cdot \cos\beta = b \cdot \cos\alpha$, to ten trójkąt jest równoramienny.

D 7.44. Boki trójkąta mają długość a, b, c, a kąty są odpowiednio równe α, β, γ. Wykaż, że jeśli $\frac{a}{c} \cdot \sin\alpha + \frac{b}{c} \cdot \sin\beta = \sin\gamma$, to ten trójkąt jest prostokątny.

D 7.45. W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC. Na okręgu wybrano punkt D, różny od punktów A, B, C. Poprowadzono trzy odcinki: DA, DB i DC. Wykaż, że suma długości dwóch krótszych odcinków jest równa długości trzeciego odcinka.



D 7.46. W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle A| = 45°$, $|\sphericalangle B| = 15°$, $|\sphericalangle C| = 120°$, $|BC| = \sqrt{2}$.

a) Oblicz $|AB|$ i $|AC|$.

b) Wykaż, że $\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

c) Wykaż, że $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

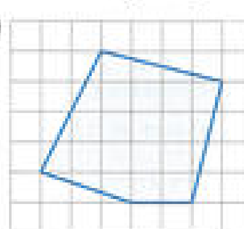
d) Długości przyprostokątnych a, b pewnego trójkąta prostokątnego spełniają zależność: $a^2 + b^2 = 4ab$. Wykaż, że kąty ostre tego trójkąta są równe 15° i 75°.

7.47. W trójkącie ostrokątnym ABC kąty przy wierzchołkach A i B są odpowiednio równe α i β. Wiedząc suma trzech wysokości tego trójkąta jest równa m, oblicz długości boków tego trójkąta.

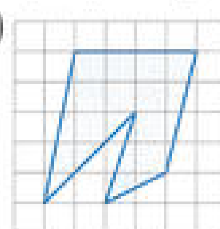
Pole figury płaskiej

7.48. Pole jednej kratki jest równe 1. Oblicz pola poniższych figur.

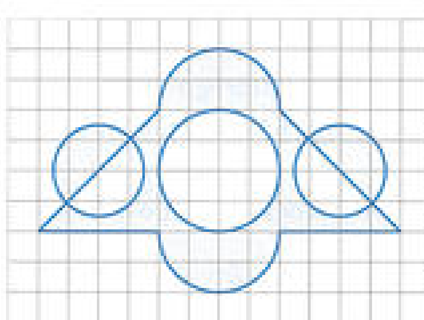
a)



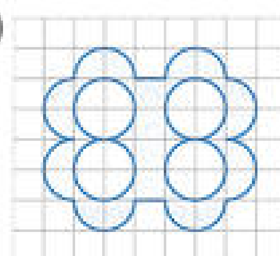
b)



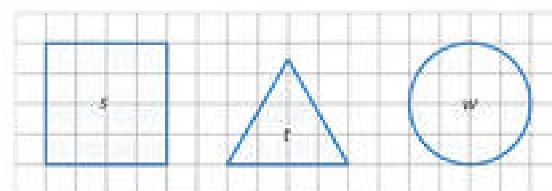
c)



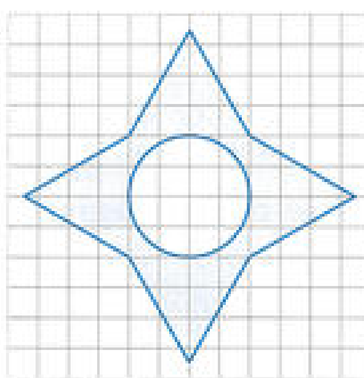
d)



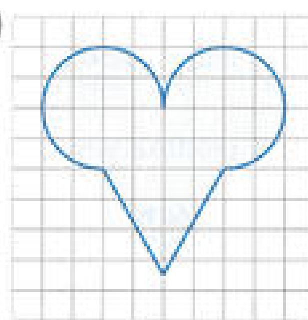
7.49. Na rysunku obok dane są trzy figury: kwadrat, trójkąt równoboczny i koło, których pola są odpowiednio równe: s, t, w. Wyraź pola figur umieszczonych poniżej za pomocą pól s, t, w.



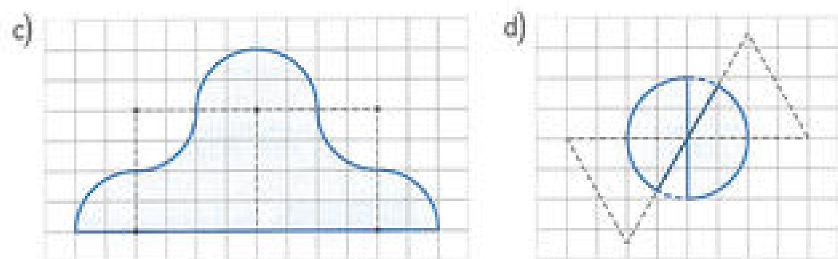
a)



b)



c) d)



Pole trójkąta, cz. 1

7.50. Wyznacz wysokość trójkąta równobocznego, którego pole jest równe $3\sqrt{3}$ cm^2.

7.51. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 4 cm dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz:

a) wysokość trójkąta b) pole tego trójkąta.

7.52. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 20 cm i 21 cm. Oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej.

7.53. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 12 cm i dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku 4 : 9. Oblicz pole tego trójkąta.

7.54. Pole trójkąta prostokątnego jest równe 136,5 cm^2, a cosinus jednego z kątów wynosi $\frac{84}{85}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

7.55. W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów jest równy $\frac{12}{13}$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 13 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

7.56. W trójkącie prostokątnym sinus jednego z kątów jest równy $\frac{3}{5}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 7 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

7.57. W trójkącie równoramiennym długość podstawy wynosi 16 cm, a wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 15 cm. Oblicz wysokość poprowadzoną na ramię trójkąta.

7.58. W trójkącie równoramiennym ABC stosunek długości podstawy AB do ramienia BC jest równy $4:\sqrt{5}$. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 50, oblicz:

a) długości boków trójkąta,

b) wysokość poprowadzoną z wierzchołka A.

7.59. Wysokości trójkąta pozostają w stosunku 20 : 15 : 12.

D a) Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny.

b) Oblicz sumę sinusów wszystkich kątów tego trójkąta.

7.60. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 4$ cm, $|BC| = \sqrt{37}$ cm oraz $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Oblicz pole trójkąta ABC.

7.61. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 15$ cm, $\sin|\sphericalangle BAC| = \frac{12}{13}$ oraz $\sin|\sphericalangle CBA| = 0{,}8$. Oblicz pole trójkąta ABC.

7.62. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki mają długość 10 cm i 14 cm, a kąt między nimi jest równy:

a) 30° b) 120° c) 135°.

7.63. Dwa boki trójkąta mają długość 10 cm i 12 cm, a jego pole jest równe 30 cm^2. Jaką miarę może mieć kąt tego trójkąta między danymi bokami?

7.64. W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. Wiedząc, że kąt między danymi bokami jest rozwarty, oblicz:

a) miarę tego kąta b) długość trzeciego boku.

7.65. W trójkącie ostrokątnym dwa boki mają długość 5 cm i 8 cm. Pole tego trójkąta jest równe $10\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz:

a) długość trzeciego boku,

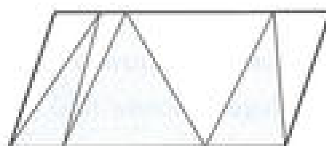
b) wysokość poprowadzoną na trzeci bok tego trójkąta.

7.66. W trójkącie równoramiennym cosinus jednego z kątów jest równy –0,8. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 7,5 cm^2, oblicz:

a) długości boków trójkąta b) sinus kąta przy podstawie.

7.67. Pole trójkąta jest równe 20 cm^2, a jeden z jego kątów ma miarę 150°. Wiedząc, że wysokości poprowadzone z wierzchołków kątów ostrych pozostają w stosunku 5 : 4, oblicz długości boków trójkąta przy kącie rozwartym.

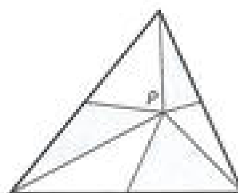
D **7.68.** Wierzchołki trójkątów na rysunku obok należą do dwóch przeciwległych boków równoległoboku. Wykaż, że suma pól trójkątów białych jest równa sumie pól trójkątów niebieskich.



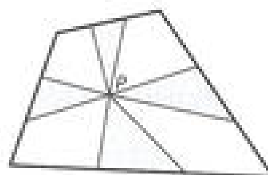
D **7.69.** Wykaż, że w równoległoboku na rysunku obok suma pól wielokątów niebieskich jest równa sumie pól wielokątów szarych.



D **7.70.** Punkt *P* leży dowolnie wewnątrz trójkąta, jak na rysunku obok. Każdy bok tego trójkąta jest podzielony jednym bokiem odpowiedniego niebieskiego trójkąta na dwa równe odcinki. Wykaż, że suma pól białych trójkątów jest równa sumie pól niebieskich trójkątów.



D **7.71.** Każdy bok czworokąta jest podzielony dwoma punktami na trzy równe odcinki. Punkt *P* jest dowolnym punktem leżącym we wnętrzu czworokąta, (zobacz rysunek obok). Wykaż, że suma pól białych czworokątów jest dwa razy większa od sumy pól niebieskich trójkątów.



7.72. W trójkącie równoramiennym *ABC* podstawa *AB* ma długość 10 cm, a wysokość *CD* jest równa 12 cm. Oblicz pole trójkąta *ABE*, jeśli punkt *E* należy do boku *AC* oraz:

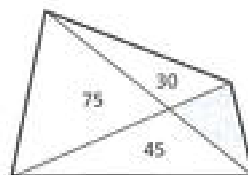
a) $|AE| = |EC|$ b) $|AE| : |EC| = 2 : 1$.

7.73. W trójkącie *ABC* wysokość poprowadzona na podstawę dzieli tę podstawę w stosunku 3 : 5. Wiedząc, że pola powstałych trójkątów różnią się o 4 cm², oblicz pole trójkąta *ABC*.

7.74. Przekątne czworokąta dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty. Dane są pola trzech trójkątów (zobacz rysunek obok). Oblicz:

a) stosunek długości odcinków, na jakie punkt przecięcia przekątnych dzieli te przekątne,

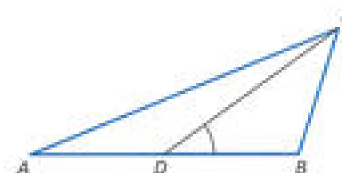
b) pole czwartego trójkąta.



D **7.75.** W trapezie *ABCD*, $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie *P*. Wykaż, że pola trójkątów *BCP* i *APD* są równe.

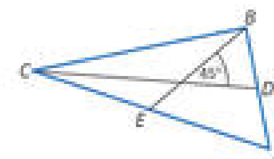
7.76. W trapezie *ABCD*, $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie *E*. Pola trójkątów *ABE* i *BCE* są odpowiednio równe 78 i 52. Oblicz pole trójkąta *CDE*.

7.77. Pole trójkąta *ABC* jest równe 24 cm². Środkowa *CD* ma długość 9 cm, a sinus kąta *BDC* jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz długość boku *AB*.



D **7.78.** W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe.

7.79. Środkowe *CD* i *BE* trójkąta *ABC* przecinają się pod kątem 45°, jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|BE| = 12$ cm oraz $|CD| = 21$ cm, oblicz pole trójkąta *ABC*.



7.80. Dwa boki trójkąta mają długość *a* i *b*. Kąt zawarty między tymi bokami jest równy γ. Oblicz długość odcinka dwusiecznej kąta γ, zawartego w tym trójkącie, jeśli:

a) $a = 8$, $b = 6$, $\gamma = 90°$ b) $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 60°$

7.81. Dwa boki trójkąta *ABC* mają długość: $|AC| = 4$, $|BC| = 6$, a kąt *ACB* ma miarę 150°. Przez wierzchołek *C* poprowadzono prostą prostopadłą do boku *BC*, która przecięła bok *AB* w punkcie *D*. Oblicz:

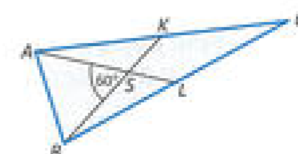
a) długość odcinka *CD*   b) pola trójkątów *ADC* i *CDB*.

7.82. Dwa boki trójkąta *ABC* mają długość: $|AC| = 6$, $|BC| = 12$, a kąt *ACB* ma miarę 120°. Przez punkt *C* poprowadzono prostą prostopadłą do boku *AC*, która przecięła bok *AB* w punkcie *D*.

a) Oblicz długość odcinka *CD*.

D b) Wykaż, że punkt *D* jest środkiem boku *AB*.

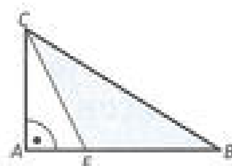
7.83. Podstawą trójkąta równoramiennego *ABC* jest bok *AB*. Środkowe *AL* i *BK* przecinają się w punkcie *S* po kątem 60° (patrz rysunek obok). Wiadomo, że pole trójkąta *ABS* jest równe $\sqrt{3}$.



a) Oblicz długości boków trójkąta *ABC*.

b) Czy kąt *ACB* jest równy 30°? Odpowiedź uzasadnij.

7.84. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = 90°$ oraz $|AC| = 12$ cm. Na boku AB tego trójkąta zaznaczono punkt E w taki sposób, że $|CE| = |EB|$. Wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe 108 cm², oblicz:



a) pole trójkąta BCE,
b) wysokość trójkąta BCE poprowadzoną z punktu E.

7.85. Pole trójkąta ABC jest równe 30 cm². Wysokość AD dzieli bok BC w stosunku 1 : 4, licząc od wierzchołka C. Wiedząc, że $|AB| = 10$ cm, oblicz długości boków BC i AC.

D **7.86.** Punkt E jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$, gdzie $AB \parallel DC$. Pola trójkątów ABE i CDE są odpowiednio równe P_1 i P_2. Niech P oznacza pole trapezu $ABCD$. Wykaż, że $P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$.

Pole trójkąta, cz. 2

7.87. Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm² wycięto koło styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła.

7.88. Pole trójkąta jest równe 63 cm². Oblicz jego obwód wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm.

7.89. W trójkącie ABC dane są kąty: $|\sphericalangle A| = 30°$, $|\sphericalangle B| = 45°$. Wysokość CD jest równa 3 cm.
a) Oblicz pole trójkąta ABC.
b) Wyznacz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 0,1 cm.

7.90. Pole trójkąta równoramiennego wynosi 48 cm², a sinus kąta przy podstawie jest równy 0,8. Oblicz:
a) obwód trójkąta,
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.91. Pole trójkąta równoramiennego wynosi 168 cm². Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $5\frac{1}{4}$ cm. Wiadomo, że ramię jest dłuższe od podstawy o 11 cm.
a) Oblicz długości boków tego trójkąta.
D b) Wykaż, że kąt α między ramionami tego trójkąta jest większy od 30° i jednocześnie mniejszy od 45°.

7.92. Pole trójkąta wynosi 84 cm², a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 4 cm. Wiedząc, że długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi, wyznacz najkrótszą wysokość tego trójkąta.

7.93. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 16 cm, Wiedząc, że pole tego trójkąta jest równe 120 cm², oblicz:
a) długość ramienia,
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.94. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 32 cm, a cosinus kąta przy podstawie jest równy 0,8. Oblicz:
a) pole tego trójkąta,
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.95. W trójkącie dwa boki mają długość 15 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 12,5 cm. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 108 cm², wyznacz:
a) długość podstawy tego trójkąta,
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.96. Dwa boki trójkąta mają długość 42 cm i 20 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $21\frac{1}{4}$ cm. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 336 cm², wyznacz:
a) długość trzeciego boku,
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.97. Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długość 17 cm i 25 cm, a jego pole jest równe 210 cm². Oblicz:
a) sinus kąta między ramionami trójkąta,
b) długość trzeciego boku,
c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.98. Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długość 8 i 3, a jego pole jest równe $6\sqrt{3}$. Oblicz:

a) miarę kąta między tymi bokami,
b) długość trzeciego boku,
c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
d) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.99. Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest równy 10. Wiedząc, że kąt między ramionami jest równy 150°, oblicz pole tego trójkąta.

7.100. Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest równy $5\sqrt{3}$. Wiedząc, że kąty przy podstawie są równe 30°, oblicz pole tego trójkąta.

7.101. Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz:
a) pole trójkąta,
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.102. Boki trójkąta mają długość 25 cm, 39 cm, 56 cm. Oblicz:
a) wysokości tego trójkąta,
b) sinus najmniejszego kąta,
c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.103. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 8 cm. W trójkąt ten wpisano okrąg. Punkty D i E są punktami styczności okręgu, odpowiednio z ramionami AC i BC tego trójkąta, przy czym $|DC|+|CE|=|DA|+|AB|+|BE|$. Oblicz:
a) pole trójkąta ABC,
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.104. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 8 cm i 6 cm. Przez wierzchołek kąta prostego poprowadzono prostą, która podzieliła ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Oblicz:
a) pola powstałych trójkątów,
b) stosunek promieni okręgów wpisanych w te trójkąty.

7.105. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

7.106. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 17 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt – 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

7.107. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego obwód jest równy 70 cm, a pole wynosi 210 cm^2.

7.108. Pole trójkąta prostokątnego jest równe 180 cm^2, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 4 cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

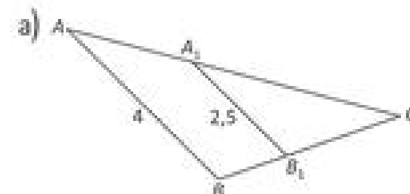
7.109. W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy, a suma promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt i promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 11 cm. Oblicz długość podstawy trójkąta.

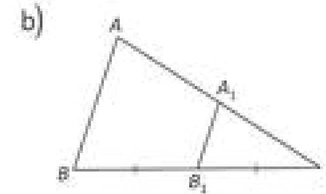
Pola trójkątów podobnych

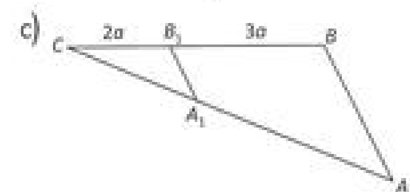
7.110. Trójkąt ABC ma obwód równy 30 cm, a pole 24 cm^2. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC wynosi 15 cm. Oblicz pole trójkąta $A_1B_1C_1$.

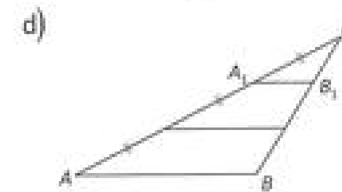
7.111. Trójkąt ABC ma obwód równy 33 cm, a jego pole wynosi 18 cm^2. Oblicz obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC wiedząc, że pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równe 2 cm^2.

7.112. Odcinek A_1B_1 jest równoległy do odcinka AB. Na podstawie danych na rysunku oblicz stosunek pola trójkąta A_1B_1C do pola trójkąta ABC.

a)


b)


c)


d)


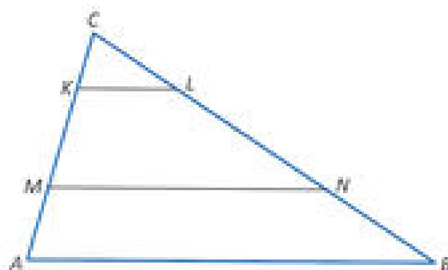
7.113. Podstawa AB trójkąta ABC ma długość 24 cm. Na boku AC zaznaczono punkty A_1, A_2, a na boku BC punkty B_1, B_2 w taki sposób, że $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_2B_2 \parallel AB$. Wiedząc, że $|A_1B_1| = 8$ cm, $|A_2B_2| = 20$ cm, oblicz stosunek pól:

a) trójkątów A_1B_1C, A_2B_2C i ABC b) wielokątów A_1B_1C, $A_2B_2B_1A_1$ i ABB_2A_2.

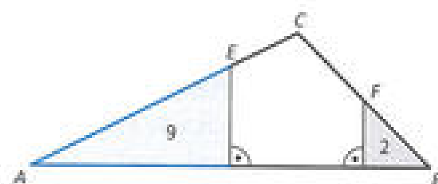
7.114. W trójkącie ostrokątnym poprowadzono dwie proste równoległe do podstawy, które podzieliły wysokość trójkąta opuszczoną na tę podstawę na trzy odcinki równej długości. Oblicz stosunek pól powstałych w wyniku tego podziału figur.

7.115. Stosunek pól dwóch trójkątów podobnych $A_1B_1C_1$ i ABC wynosi $\frac{4}{9}$. Wiedząc, że podstawa A_1B_1 trójkąta $A_1B_1C_1$ jest o 7 cm krótsza od podstawy AB trójkąta ABC, oblicz $|A_1B_1|$ i $|AB|$.

7.116. Odcinki KL i MN są równoległe do podstawy AB trójkąta ABC. Stosunek pól figur KLC, $MNLK$ i $ABNM$ w podanej kolejności wynosi 1 : 8 : 7. Oblicz $|KL| : |MN| : |AB|$.



7.117. W trójkącie ABC na rysunku obok punkt E należy do boku AC oraz $|EC| : |AE| = 1 : 3$; natomiast punkt F jest środkiem odcinka BC. Proste prostopadłe do podstawy AB i przechodzące odpowiednio przez punkty E i F odcięły dwa trójkąty, których pola są odpowiednio równe 9 i 2. Oblicz pole trójkąta ABC.



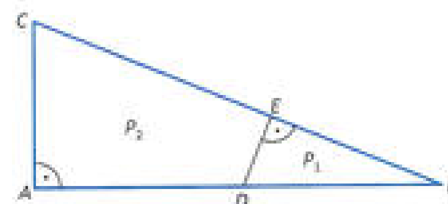
7.118. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 40 cm. W trójkąt wpisano koło, które jest styczne do ramion trójkąta w punktach D i E. Wiedząc, że $|DE| = 8$ cm, oblicz:

a) pole trójkąta DEC b) pole czworokąta $ABED$.

7.119. W trójkąt równoramienny ABC o bokach długości 13 cm, 13 cm, 10 cm wpisano koło. Styczna do koła, równoległa do podstawy, odcina od trójkąta ABC trójkąt DEC. Oblicz pole trójkąta DEC.

7.120. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AC i AB mają odpowiednio długość 8 cm i 12 cm. Na przyprostokątnej AB obrano punkt D tak, że $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ACB|$. Oblicz pole trójkąta ADC.

7.121. W trójkącie prostokątnym ABC, $|\sphericalangle A| = 90°$, przyprostokątna AC ma długość 12 cm. Odcinek DE, prostopadły do przeciwprostokątnej BC, dzieli trójkąt na dwie figury o polach równych $P_1 = 6\ \text{cm}^2$ i $P_2 = 90\ \text{cm}^2$. Oblicz długości boków trójkąta DBE.



7.122. W trójkącie prostokątnym ABC stosunek przyprostokątnych jest równy $|AB| : |AC| = 4 : 3$. Punkt D dzieli przyprostokątną AB na odcinki takie, że $|DB| = 3|AD|$. Punkt E należy do przeciwprostokątnej BC i odcinek DE jest prostopadły do boku BC. Oblicz, jakim procentem pola trójkąta ABC jest pole trójkąta DBE.

7.123. W trójkącie prostokątnym ABC stosunek przyprostokątnych jest równy $|AC| : |AB| = 5 : 12$. Punkt D należy do przeciwprostokątnej BC oraz $|CD| : |DB| = 5 : 8$. Punkt E należy do przyprostokątnej AB i $ED \perp CB$. Oblicz stosunek pola czworokąta $AEDC$ do pola trójkąta EBD.

7.124. W trójkącie ostrokątnym równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, poprowadzono wysokości CD i BE. Pole trójkąta ABE jest o 44% większe od pola trójkąta ADC. Wiedząc, że obwód trójkąta ABC jest równy 80 cm, oblicz pole trójkąta ABC.

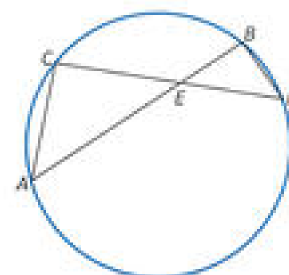
7.125. Cięciwy AB i CD koła przecinają się w punkcie E. Wiedząc, że $|\sphericalangle BED| = 30°$, $|AE| = 6$ cm $|ED| = 3$ cm oraz $|EB| = 2$ cm, oblicz pole trójkąta AEC.

7.126. W kole poprowadzono cięciwy AB i CD, które przecięły się w punkcie E. Pole trójkąta AEC jest o 210 cm² większe od pola trójkąta EDB. Wiedząc, że $|AE| = 40$ cm, $|ED| = 16$ cm oraz $|BE| = 10$ cm, oblicz:

a) długość odcinka CE,

b) pola trójkątów AEC i EDB,

c) miarę kąta przecięcia się cięciwy AB z cięciwą CD.



7.127. W trójkąt ABC wpisano koło, które jest styczne do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Wiadomo, że $|AD| = |EB| = 7$ cm oraz $|DE| = 10{,}08$ cm.

D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

b) Oblicz pole trójkąta ABC.

7.128. W ostrokątnym trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, wysokość CD przecięła się z wysokością AE w punkcie S. Wysokość AE dzieli ramię BC trójkąta na odcinki BE i EC, których długości pozostają w stosunku $|BE| : |EC| = 1 : 2$.

a) Oblicz sinus kąta EAB.

c) Wyznacz stosunek pola trójkąta ADS do pola trójkąta SEC.

D **7.129.** W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg. Następnie poprowadzono dwie proste równoległe do podstawy AB: prostą l – styczną do okręgu i prostą k – przechodzącą przez środek okręgu. Te proste podzieliły trójkąt na trzy wielokąty, których pola pozostają w stosunku $1 : 3 : 5$ (licząc od pola trójkąta). Wykaż, że trójkąt ABC jest równoboczny.

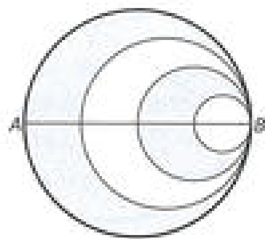
7.130. Wysokość CD trójkąta ABC ma długość 5 cm i dzieli bok AB na dwa odcinki: $|AD| = 4$ cm, $|DB| = 8$ cm. Poprowadzono prostą EF równoległą do CD, która przecięła boki AB i BC odpowiednio w punktach E i F. Wiedząc, że odcinek EF dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach, oblicz jego długość.

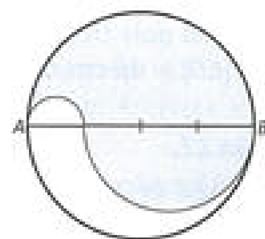
Pole koła, pole wycinka koła

7.131. Średnicę AB koła podzielono na cztery równe odcinki. Oblicz, jaką część pola tego koła stanowi figura zaznaczona kolorem niebieskim, jeśli:

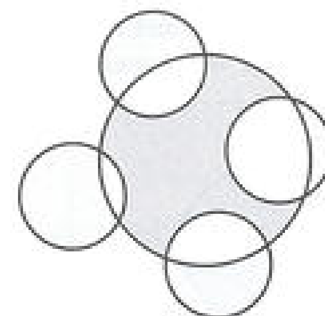
a) okręgi wyznaczające tę figurę są styczne wewnętrznie, a ich średnice są zawarte w średnicy AB

b) łuk wewnątrz koła jest sumą dwóch półokręgów (patrz rysunek poniżej).





D **7.132.** Każde z czterech mniejszych kół ma promień 1. Większe koło ma promień 2. Wykaż, że pole figury niebieskiej jest równe polu figury szarej.



7.133. Promień koła jest równy r. Kąt wycinka tego koła ma miarę α. Oblicz pole wycinka, jeśli:

a) $r = 9$ cm, $\alpha = 20°$ b) $r = 12$ cm, $\alpha = 150°$ c) $r = 5$ cm, $\alpha = 54°$.

7.134. Pole wycinka koła jest równe P, a łuk tego wycinka ma długość L. Oblicz promień koła, jeśli:

a) $P = 10\pi$ cm^2, $L = 2{,}5\pi$ cm

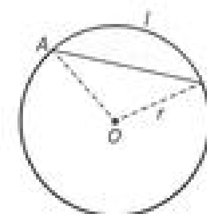
b) $P = 30$ cm^2, $L = 12$ cm

c) $P = 210\pi$ cm^2, $L = 14\pi$ cm.

7.135. Dane jest koło o środku w punkcie O i promieniu r. Oblicz pole odcinka tego koła (zaznaczonego na rysunku obok), wyznaczonego przez łuk długości L, jeśli:

a) $r = 2$, $L = \pi$ b) $r = 3$, $L = 2\pi$

c) $r = 6$, $L = 5\pi$.



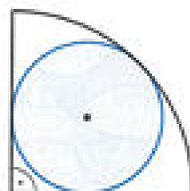
7.136. Stosunek pola trójkąta do pola koła wpisanego w ten trójkąt jest równy $6 : \pi$. Wiedząc, że średnica tego koła ma długość 6 cm, oblicz obwód trójkąta.

7.137. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie.

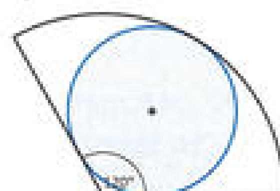
7.138. Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła, wyznaczonego przez ten sam łuk.

7.139. Wycinek koła jest wyznaczony przez kąt środkowy, zaznaczony na rysunku poniżej. W wycinek wpisano koło o polu P. Oblicz pole wycinka, jeśli:

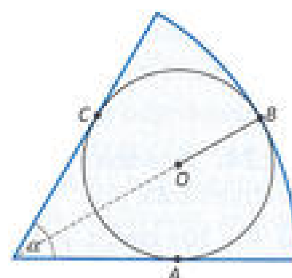
a) $P = 4\pi$ cm^2



b) $P = 9\pi$ cm^2



7.140. W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm (zobacz rysunek obok). Oblicz pole wycinka koła.



7.141. W kole z jednego punktu okręgu poprowadzono dwie cięciwy; każda ma długość 6 cm. Wiedząc, że utworzyły one kąt 60°, oblicz pole części koła zawartej między tymi cięciwami.

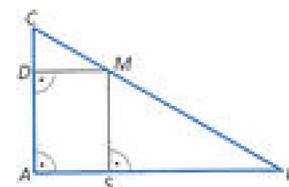
7.142. Odległość środków dwóch kół o jednakowych promieniach r wynosi r. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

7.143. Podstawa trójkąta równobocznego jest średnicą koła o promieniu r. Oblicz stosunek pola części koła leżącej na zewnątrz trójkąta do pola części koła leżącej wewnątrz tego trójkąta.

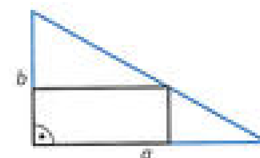
7.144. W kąt o mierze 60° wpisano dwa koła styczne do ramion kąta i styczne zewnętrznie do siebie. Wyznacz pole większego koła, jeśli pole mniejszego jest równe 5.

Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń

D **7.145.** Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej BC. Z punktu M leżącego na boku BC poprowadzono odcinki MD oraz MS prostopadłe odpowiednio do przyprostokątnych AC oraz AB. Wykaż, że $\frac{|MD|}{|AB|}+\frac{|MS|}{|AC|}=1$.



D **7.146.** W trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość a i b, gdzie $a > b$, wpisano prostokąt, jak na rysunku obok. Stosunek boków prostokąta jest równy 1 : 2. Wykaż, że długość krótszego boku prostokąta jest równa $\frac{ab}{2a+b}$ lub $\frac{ab}{a+2b}$. W którym przypadku pole prostokąta jest większe?



D **7.147.** Punkt M należy do podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC, $M \neq A$ i $M \neq B$. Wykaż, że suma odległości punktu M od ramion trójkąta jest równa wysokości trójkąta, poprowadzonej z punktu A.

D **7.148.** Boki trójkąta mają długość a, b, c. Wysokości opuszczone na te boki są odpowiednio równe h_a, h_b, h_c. Wykaż, że jeśli $h_a + h_b = h_c$, to $c=\frac{ab}{a+b}$.

D **7.149.** W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle ACB| = 135°$ oraz $|BC| = a$. Wykaż, że jeśli środkowa CD tego trójkąta jest prostopadła do boku BC, to:

a) $|CD|=\frac{a}{2}$

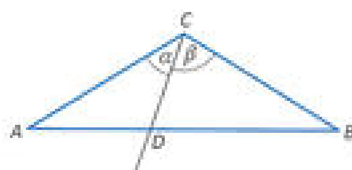
b) $|AC| = a\sqrt{2}$.

D **7.150.** W trójkącie dwa boki mają długość a i b, a kąt zawarty między nimi jest równy α. Niech x oznacza długość odcinka dwusiecznej tego kąta, zawartego w tym trójkącie. Wykaż, że:

a) jeśli $\alpha = 120°$, to $x=\frac{ab}{a+b}$

b) jeśli $\alpha = 90°$, to $x=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

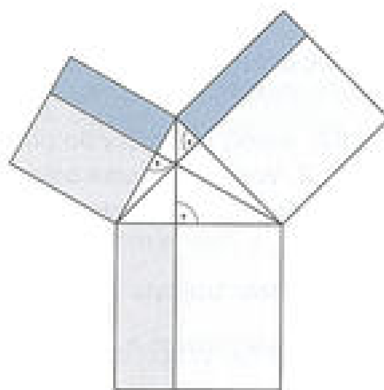
D 7.151. Punkt D należy do podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC. Półprosta $CD^{\to}$ dzieli kąt przy wierzchołku C na kąty α i β, jak na rysunku obok. Wykaż, że $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.



D 7.152. Punkt M jest dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta. Niech x, y, z oznaczają odległości punktu M odpowiednio od boków a, b, c tego trójkąta, natomiast h_a, h_b, h_c – wysokości poprowadzone na te boki. Wykaż, że $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$.

D 7.153. Wykaż, że jeśli wysokości trójkąta o bokach długości a, b, c są odpowiednio równe: $\frac{d}{9}$, $\frac{d}{10}$, $\frac{d}{14}$, to ten trójkąt jest rozwartokątny.

D 7.154. Na bokach trójkąta ostrokątnego zbudowano kwadraty, następnie poprowadzono proste zawierające wysokości tego trójkąta. Te proste podzieliły kwadraty na sześć prostokątów (zobacz rysunek obok). Wykaż, że prostokąty w tym samym kolorze mają równe pola.



D 7.155. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki x i y. Wykaż, że $ab = 2xy$.

D 7.156. Wykaż, że jeśli suma wysokości trójkąta jest 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to ten trójkąt jest równoboczny.

Test sprawdzający do rozdziału 7.

1. Trójkąt prostokątny równoramienny ma pole równe 2 cm². Z tego wynika, że przyprostokątna ma długość:

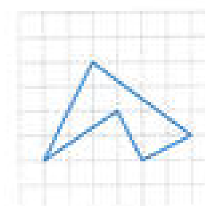
A. $\sqrt{2}$ cm B. 2 cm C. $2\sqrt{2}$ cm D. 4 cm

2. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 7 cm i 24 cm. Niech h oznacza odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Wówczas:

A. $h = 3\frac{9}{25}$ cm B. $h = 12{,}5$ cm C. $h = 6{,}72$ cm D. $h = 5\frac{23}{25}$ cm

3. Pole jednej kratki wynosi 1. Pole figury na rysunku obok jest równe:

A. 8 B. 8,5
C. 9 D. 9,5.



4. Trójkąt $A_1B_1C_1$ o polu 36 cm² jest podobny do trójkąta ABC o polu 4 cm². Skala podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC jest równa:

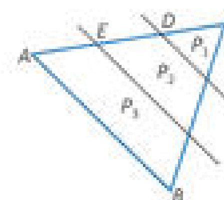
A. 3 B. 9 C. 12 D. $\frac{1}{9}$

5. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona na przeciwprostokątną dzieli ją na dwa odcinki, długości 2 cm i 8 cm. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 16 cm² B. 20 cm² C. 24 cm² D. 28 cm²

6. Na boku AC trójkąta ABC zaznaczono punkty D, E w taki sposób, że $|AE| = |ED| = |DC|$. Przez punkty E, D poprowadzono proste równoległe do boku AB, które podzieliły trójkąt na trzy rozłączne figury o polach równych odpowiednio P_1, P_2, P_3 (zobacz rysunek obok). Zatem:

A. $P_2 : P_3 = 1 : 2$ B. $P_2 : P_3 = 2 : 3$
C. $P_2 : P_3 = 4 : 9$ D. $P_2 : P_3 = 3 : 5$



7. Odcinek CD jest środkową w trójkącie ABC. Trójkąt DBC ma pole równe 3 cm². Pole trójkąta ABC wynosi:

A. 4,5 cm² B. 5 cm² C. 6 cm² D. 7,5 cm²

8. Boki trójkąta mają długość: 3, 4, 5. Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe:

A. 5π B. $6{,}25\pi$ C. 10π D. 25π

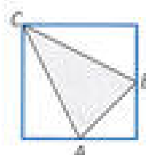
9. Boki trójkąta mają długość: 13, 14, 15. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 105 B. 91 C. 84 D. 42

10. W trójkącie dwa boki mają długość 8 cm i 5 cm, a kąt między tymi bokami jest równy 150°. Pole tego trójkąta jest równe:

A. $20\ cm^2$ B. $10\sqrt{3}\ cm^2$ C. $10\sqrt{2}\ cm^2$ D. $10\ cm^2$

11. Na rysunku obok punkty A i B są środkami dwóch sąsiednich boków kwadratu. Jaką część pola kwadratu stanowi pole trójkąta ABC?

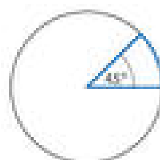


A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{2}{5}$

12. Pole trójkąta wynosi $48\ cm^2$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 16 cm B. 32 cm C. 72 cm D. 144 cm

13. Na rysunku obok dany jest wycinek koła, którego kąt jest równy 45°. Jeśli łuk tego wycinka ma długość π, to pole koła jest równe:

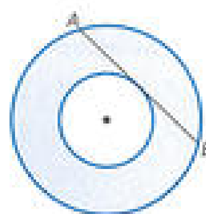


A. π B. 4π
C. 8π D. 16π

14. Pole wycinka koła o promieniu 12 cm jest równe $60\pi\ cm^2$. Kąt środkowy, wyznaczający dany wycinek koła jest równy:

A. 150° B. 135° C. 120° D. 90°

15. Dane są dwa okręgi współśrodkowe. Cięciwa AB większego okręgu ma długość 10 cm i jest styczna do mniejszego okręgu. Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi jest równe:



A. $25\pi\ cm^2$ B. $100\pi\ cm^2$
C. $50\pi\ cm^2$ D. $75\pi\ cm^2$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

16. Boki trójkąta mają długość: $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{12}$, $c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

17. Boki trójkąta mają długość a, b, c; kąty są odpowiednio równe α, β, γ; R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli:

a) $a=\sqrt{6}$, $b=2$, $\beta=45°$
b) $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $\alpha=45°$
c) $R=c=5$, $\alpha=60°$
d) $R=3$, $a=\sqrt{27}$, $\beta=45°$, $c<b$.

18. Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego, którego pole jest równe $25\sqrt{2}$, a kąt między ramionami jest równy 45°.

19. W trójkącie ABC bok BC ma długość 16 cm oraz $|\sphericalangle ACB|=120°$. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 16 cm, wyznacz:

a) pozostałe kąty trójkąta ABC,
b) wysokość poprowadzoną z wierzchołka C,
c) długość środkowej AD.

20. W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{3}{5}$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 12,5 cm. Oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej.

21. Pole trójkąta prostokątnego wynosi $240\ cm^2$, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $1\frac{7}{8}$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

22. Boki trójkąta mają długość: 13 cm, 20 cm, 21 cm. Oblicz:

a) pole tego trójkąta,
b) sinus największego kąta,
c) promień okręgu wpisanego w trójkąt,
d) promień okręgu opisanego na trójkącie.

23. Dwa boki trójkąta mają długość 8 i 5, a kąt między tymi bokami jest równy: $\alpha=60°$. Oblicz:

a) długość trzeciego boku trójkąta,
b) wysokość poprowadzoną na trzeci bok,
c) długość odcinka dwusiecznej kąta α, zawartego w tym trójkącie,
d) długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta α.

24. Dwa boki trójkąta mają długość 28 cm i 25 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $14\frac{1}{6}$ cm. Wiedząc, że pole trójkąta wynosi 210 cm^2, wyznacz:

a) długość trzeciego boku,

b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

25. Dwa boki trójkąta mają długość: $a = 7$ cm, $b = 8$ cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $\sqrt{5}$ cm. Wiedząc, że pole trójkąta wynosi $12\sqrt{5}$ cm^2, oblicz:

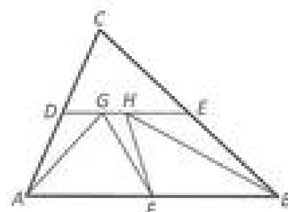
a) długość trzeciego boku,

b) sinusy kątów tego trójkąta.

D **26.** Punkty D, E, F są środkami boków trójkąta ABC. Punkty G, H należą do odcinka DE. Wykaż, że:

a) pola trójkątów AFG, FBH oraz DEC są równe,

b) suma pól trójkątów niebieskich jest równa polu jednego białego trójkąta.



D **27.** W danym trójkącie poprowadzono dwusieczną jednego z kątów. Wykaż, że jeśli pola powstałych dwóch trójkątów są równe, to dany trójkąt jest równoramienny.

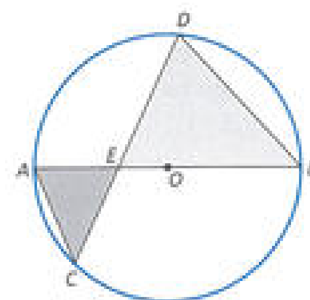
28. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 20$, $|BC| = 15$ i $|\sphericalangle C| = 30°$. Punkt D należy do boku BC oraz pole trójkąta ADC jest dwa razy większe od pola trójkąta ABD. Oblicz $|AD|$.

29. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 4$ cm, dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wiedząc, że pole trójkąta ADC jest o $6\sqrt{3}$ cm^2 większe od pola trójkąta DBC, oblicz pole trójkąta ABC.

30. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, przekątne przecinają się w punkcie E. Wiedząc, że pola trójkątów ABE i CDE są odpowiednio równe 90 cm^2 i 40 cm^2, oblicz pole trójkąta AED.

31. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ABC pozostają w stosunku $|AC| : |AB| = 3 : 4$. Symetralna przeciwprostokątnej BC przecina bok BC w punkcie D i bok AB w punkcie E. Jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta EBD?

32. Pole koła jest równe $72\frac{1}{4}\pi$ cm^2. Cięciwa CD przecina średnicę AB w punkcie E, odległym o 5 cm od środka koła. Wiedząc, że pole trójkąta EBD jest 9 razy większe od pola trójkąta ACE, oblicz odległość cięciwy CD od środka koła.



33. Pole wycinka koła jest równe 40π cm^2, a łuk tego wycinka ma długość 10π cm. Oblicz:

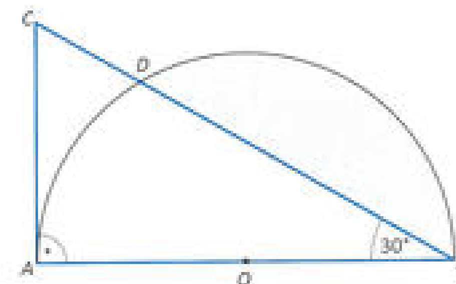
a) promień koła

b) miarę kąta środkowego tego wycinka.

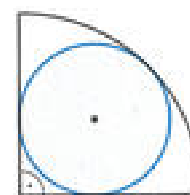
34. W trójkącie prostokątnym ABC dane są: $|AC| = 3$ cm, $|\sphericalangle CAB| = 90°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$. Przyprostokątna AB jest średnicą półkola, jak na rysunku obok. Punkt D jest punktem przecięcia półokręgu z bokiem BC. Oblicz:

a) długość cięciwy DB,

b) pole odcinka koła, zaznaczonego na rysunku obok.



D **35.** W ćwiartkę koła o promieniu $R = 1$ wpisano koło, którego promień jest równy r. Wykaż, że $r = \sqrt{2} - 1$.



36. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 26 cm. Wysokość AE jest równa 24 cm. Oblicz:

a) obwód trójkąta ABC,

b) długości odcinków, na jakie wysokość CD podzieliła wysokość AE,

c) stosunek pola trójkąta ADS do pola trójkąta CSE, gdzie S jest punktem wspólny wysokości AE i CD.

D **37.** W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AE i BF, które przecięły się w punkcie M. Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABM.

D 38. W trójkącie ABC kąt ACB jest równy 120° oraz $|AC| = 2|BC|$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC do promienia okręgu opisanego na trójkącie DBC jest równy 3 : 1.

D 39. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 90^\circ$, poprowadzono odcinek CD w taki sposób, że $D \in AB$ oraz $|\sphericalangle BCD| = 2|\sphericalangle ACD|$. Wykaż, że jeżeli pola trójkątów ADC i BCD są równe, to kąty ostre trójkąta ABC mają miarę 30° i 60°.

D 40. W trójkącie prostokątnym ABC, $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$, cosinus kąta CAB wynosi 0,8. Punkt D jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z przeciwprostokątną AB. Wykaż, że stosunek pól trójkątów ADC i DBC jest równy 3 : 2.

8. Wielomiany

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

8.1. Wśród poniższych wyrażeń algebraicznych znajdują się wielomiany. Wskaż je.

a) $3x^7 - 2x^5 + 4$ b) $-12x^8$ c) $\frac{3}{x-1}$

d) $\sqrt{x} + 8$ e) $5 - \pi$ f) $2|x| + 3$

g) $\sqrt{2}$ h) $3x^2 - 2x + 1$ i) $\frac{2x^2 + 8}{4}$

8.2. Dany jest jednomian $F(x)$. Określ jego stopień.

a) $F(x) = -5 \cdot (x^2)^4$ b) $F(x) = 0{,}2(x^3)^5 \cdot x^2$

c) $F(x) = 8 \cdot (x^5 \cdot x^3)^6$ d) $F(x) = -0{,}3 \cdot (x^2)^5 \cdot (x^4 \cdot x^7)$

8.3. Dany jest jednomian stopnia n, $n \in \mathbb{N}$. Oblicz n, jeśli:

a) $G(x) = 0{,}5x^n$ oraz $G(4) = 32$

b) $G(x) = \frac{1}{3}x^n$ oraz $G(3) = 243$

c) $G(x) = \sqrt{5}x^n$ oraz $G(\sqrt{5}) = 125$

d) $G(x) = \sqrt{2}x^n$ oraz $G(2\sqrt{2}) = 32$.

8.4. Uporządkuj dany wielomian rosnąco. Następnie podaj stopień tego wielomianu oraz wypisz jego współczynniki.

a) $F(x) = 2 - 4x^2 + 8x^4 + 3x^2 + 8$ b) $G(x) = x - 3x^3 + 5x + 3x^3 + 2x^2$

c) $H(x) = x^5 - 2x^3 + 4 + 3x^5 + 1$ d) $W(x) = 3x - 9x^4 + x^2 - 3x + 9x^4$

8.5. Uporządkuj dany wielomian malejąco. Następnie podaj stopień tego wielomianu oraz wypisz jego współczynniki.

a) $F(x) = 4x - 3 + 5x^2 - 5x^4 - 8x$ b) $G(x) = 9x^2 + 8 - 7x - 9x^2 + 7x$

c) $H(x) = 2 - 3x^3 + 2x^2 + 4x^4$ d) $W(x) = -4x + 6 + 2x - 8x^3 + 4x^5$

8.6. Podaj przykład wielomianu jednej zmiennej rzeczywistej x:

a) stopnia siódmego, który jest uporządkowany rosnąco i ma tylko trzy wyrazy różne od zera,

b) stopnia dziewiątego, który jest uporządkowany malejąco i ma tylko pięć wyrazów różnych od zera.

8.7. Dany jest wielomian $W(x)$. Oblicz jego wartość dla podanych obok wielomianu liczb.

a) $W(x) = -x^3 + 4x^2 - 7$; $\quad -3, -1, 4, 5$

b) $W(x) = x^3 - x^2 + 1$; $\quad \sqrt{2}+1,\ \sqrt{3}-\sqrt{2}$

8.8. Podaj przykład wielomianu $W(x)$ zmiennej rzeczywistej x:

a) stopnia piątego, który ma tylko trzy wyrazy różne od zera oraz dla $x = -1$ przyjmuje wartość 6,

b) stopnia czwartego, który dla $x = -\sqrt{2}$ przyjmuje wartość 0.

8.9. Wyznacz sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = 8x^7 - 2x^5 + 4x^3 - 10$

b) $W(x) = -12x^5 + 6x^3 + 4x + 1$

c) $W(x) = (3x^{10} - 2x^{11})^{50}$

d) $W(x) = (-4x^7 + 2x^9)^5$.

8.10. Wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = -x^4 - 2x^3 + ax + 3$, jeśli $W(-2) = -1$.

8.11. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $W(x) = -5x^3 + ax + b$ wiedząc, że $W(-1) = 2$ oraz $W(2) = -31$.

8.12. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $W(x) = 2x^4 + ax^3 + x + b$ wiedząc, że $W(1) = -5$ oraz $W(-1) = -1$.

8.13. Jeden ze współczynników wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ jest wyznaczony przez warunek $W(1) + W(-1) = 8$. Podaj wartość tego współczynnika.

8.14. Wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = x^4 + ax - 4$, wiedząc, że $W(\sqrt{2}-1) = W(1-\sqrt{2})$.

8.15. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = 3x^3 - (2a + b)x^2 + (a - b)x + 6$ jest równa 8 oraz $W(-2) = -82$. Oblicz a i b.

8.16. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = 5x^3 + (2a^2 - 3)x^2 + (a + 1)x + 2$ jest równa 11. Oblicz a.

8.17. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = -2x^4 + (a - a^2)x^3 + b - 4$ jest równa -6 oraz $W(0) = 8$. Oblicz a i b.

8.18. Wyznacz współczynniki wielomianu $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = -3x^3 + (a + 3b)x^2 + cx - b$ oraz $W(1) = 4$, $W(-1) = 2$, $W(2) = 11$

b) $W(x) = 2x^4 + (a^2 + 5)x^3 + (6a - b)x^2 - 12$ oraz $W(1) = 3$, $W(-1) = -15$.

8.19. Dany jest wielomian $W(x)$ z parametrem m, $m \in \mathbb{R}$. Określ stopień tego wielomianu ze względu na wartość m.

a) $W(x) = (m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 - 2m - 3)x + m - 3$

b) $W(x) = (m^2 + 4m - 21)x^4 + (2m - 6)x^3 + (m + 7)x^2 + 3x + 1$

D **8.20.** Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + (a + b)x^2 - 3ax - b + 2$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że liczba $W(3)$ jest podzielna przez 8.

D **8.21.** Wykaż, że jeśli $W(x) = ax^3 - 11x^2 + (a - 1)x + a + 25$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$, to liczba $W(a)$ jest nieujemna.

8.22. Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, dla liczby 5 przyjmuje wartość 317, zaś dla liczby 1 przyjmuje wartość 12. Wykaż, że co najmniej jeden z jego współczynników nie jest liczbą całkowitą.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów

8.23. Dane są wielomiany $W(x)$ i $P(x)$. Wyznacz wielomian $W(x) + P(x)$.

a) $W(x) = -4x^7 + 2x^5 - 3x^2 + 6$ $\quad P(x) = 4x^7 - 3x^5 + 2x^3 + 4x^2 - 8$

b) $W(x) = 3x^5 - 8x^4 + 2x^3 - x$ $\quad P(x) = 9x^5 + 9x^4 - 6x^3 + 1$

c) $W(x) = 3 - 4x^2 + 8x^3 + x^4$ $\quad P(x) = -x^4 - 8x^3 + 2x$

d) $W(x) = \frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + 6x^3 - \frac{1}{8}$ $\quad P(x) = -0{,}25x^6 + 0{,}5x^5 - 8x^3 + 0{,}125$

8.24. Dane są wielomiany $W(x)$ i $P(x)$. Wyznacz wielomian $W(x) - P(x)$.

a) $W(x) = \frac{3}{4}x^7 - \frac{3}{8}x^6 + \frac{1}{8}x^5 + 8$ $\quad P(x) = 0{,}75x^7 + \frac{5}{8}x^6 + 0{,}125x^5 + 2$

b) $W(x) = 4x^3 - 12x^2 + 0{,}6x + 0{,}4$ $\quad P(x) = -4x^3 - 12x^2 + 0{,}5x + 0{,}4$

c) $W(x) = 3x^6 - \sqrt{2}x^5 + 2\sqrt{2}x^3 + 8x$ $\quad P(x) = 5x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 4x - 1$

d) $W(x) = \sqrt{2}x^4 - 3\sqrt{3}x^3 + 4x^2 + 1$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 + \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}$

8.25. Wykonaj działania:

a) $(2x^6 - 3x^4 + 2x) - (x^4 + 8x^2 + 4x - 1) + x^6 + 5x^4 + 6x^2$

b) $(-3x^4 + 5x^3 - 6) - (4x^4 + 2x^3 + 4x) - (-7x^4 + 3x^3 + 8)$

c) $7x^7 - 6x^5 + 2x - (4x^5 + 3x^2 - 6) - (7x^7 - 10x^5)$

d) $12x^3 - (x^7 + 4x^3) - (14x^3 - 5x^7)$.

8.26. Dany jest wielomian $W(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$. Wyznacz wielomian $F(x)$ i uporządkuj go malejąco, jeśli:

a) $F(x) = 4 \cdot W(x)$ $\quad$ b) $F(x) = -0{,}5 \cdot W(x)$ $\quad$ c) $F(x) = x^2 \cdot W(x)$

d) $F(x) = (x - 1) \cdot W(x)$ $\quad$ e) $F(x) = (x^2 + 3x) \cdot W(x)$ $\quad$ f) $F(x) = (2x^2 - 3) \cdot W(x)$.

8.27. Dane są wielomiany: $W(x) = -3x^3 + 2x^2 + 5x - 1$, $P(x) = 2x^2 + 3x$ oraz $G(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7$. Wykonaj działania:

a) $P(x) + 2G(x)$ $\quad$ b) $3P(x) - 2W(x)$

c) $W(x) - [P(x) - G(x)]$ $\quad$ d) $W(x) + G(x) - 3P(x)$.

8.28. Dane są wielomiany: $W(x) = 3x^2 - 2$, $P(x) = x^3 + 2x - 1$ oraz $G(x) = 4x^2 - 3x + 1$. Wykonaj działania:

a) $W(x) \cdot P(x)$ $\quad$ b) $P(x) \cdot G(x)$

c) $[W(x)]^2 \cdot G(x)$ $\quad$ d) $[P(x)]^2 \cdot W(x)$.

8.29. Wykonaj mnożenie:

a) $(x^7 - x^6)(x^5 - x^2)$ $\quad$ b) $(x^{12} - 1)(x^3 + x^4)$

c) $(x^7 - x^6 - 1)(x^5 + x^3)$ $\quad$ d) $(x^4 - x^3 - x^2)(x^5 + 1)$.

8.30. Wykonaj działania:

a) $(3x^2 - 4x)(3x^2 + 4x)$ $\quad$ b) $(5x^3 - 6x)^2$

c) $(3x^7 + 2x)^2$ $\quad$ d) $(9x^7 - x^3)(9x^7 + x^3)$.

D **8.31.** Wykaż, że $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$. Następnie wykonaj działania:

a) $(x^2 - x + 1)^2 - (x^2 + x + 1)^2$ $\quad$ b) $(3x^2 - x + 2)^2 - (3x^2 + x + 2)^2$

c) $(x^2 + x)^2 + (3x^2 + 1)^2$ $\quad$ d) $(2x^2 - 3x)^2 + (x^2 + 4x)^2$.

8.32. Wykonaj działania:

a) $(x^3 - 2x + 1)(x^2 + 1) + (x^4 + 3x + 2)(x^3 - 2x)$

b) $(2x^4 - 3x + 5)(x^3 + 4x + 1) + (x^3 + 2x)(x^4 - 4x^2)$

c) $(3x^3 - 2x^2 + 5x + 1)(x + 2) + (x^3 + 4x^2 - 1)(x^2 + 5x)$

d) $(x^3 - 2x^2 + 4x + 5)(x^2 - 1) - (x^3 - 4x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x)$.

8.33. Określ stopień wielomianu $W(x)$ oraz podaj wyraz wolny i współczynnik tego wielomianu przy najwyższej potędze zmiennej x – bez wykonywania działań.

a) $W(x) = (-3x^4 + 1)(2x^3 - 5)^3$ $\quad$ b) $W(x) = (4x^2 - 1)(3x^3 + 2)(x^5 - 4)$

c) $W(x) = (3x + 1)^2(2x^4 - 5)$ $\quad$ d) $W(x) = -2x^6(x^3 + 1)^4(2 - 3x)^2$

8.34. Wykonaj mnożenie wielomianów sposobem pisemnym:

a) $(3x^4 - 2x^3 + x + 2)(-2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$

b) $(-2x^5 + x^3 - 3x^2 + x + 4)(-3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 3)$

c) $(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 1)(-5x^3 + 2x^2 - 3x + 4)$

d) $(-2x^7 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 5)(-3x^8 + 5x^4 - 3x^3 + 2)$.

8.35. Podaj przykład dwóch wielomianów zmiennej rzeczywistej x, których iloczyn jest wielomianem stopnia siódmego, przyjmującym dla liczby 2 wartość 26, a jego wyraz wolny jest równy 15.

8.36. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia szóstego zmiennej rzeczywistej x, których iloczyn jest wielomianem, przyjmującym dla liczby -1 wartość 14, a jego współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest równy 6.

Równość wielomianów

8.37. Sprawdź, czy wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są równe, jeśli:

a) $W(x) = (3x - 1)(4 - 2x)(x + 1)$ $\quad P(x) = -6x^3 + 8x^2 + 10x - 4$

b) $W(x) = (3 - 5x)^2(x^2 - 1) - 25x^4$ $\quad P(x) = -30x^3 - 16x^2 + 30x - 9$

c) $W(x) = (-2x + 1)^3$ $\quad P(x) = -8x^3 + 12x^2 - 12x + 1$

d) $W(x) = 3x^5 - (2x^2 + 1)(x^3 - 1)$ $\quad P(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 + 1$.

8.38. Sprawdź, czy istnieje liczba a, dla której wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są równe, jeśli:

a) $W(x) = (x^2 - ax)(x + 2a) + 8x$ $\quad P(x) = x^3 - 2x^2$

b) $W(x) = 2x^4 - 3(a + 1)x^3 + 4a$ $\quad P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 8$

c) $W(x) = (x^3 - 2a)(x^3 + 2a) - 6x$ $\quad P(x) = x^9 + 3ax - 16$

d) $W(x) = (3x - a)^2 \cdot 4x$ $\quad P(x) = 36x^3 + 48x^2 + 16x$.

8.39. Wyznacz liczbę a, dla której wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są równe, jeśli:

a) $W(x) = (3x^2 - a)(x + 2a) - (2x - 1)$ $\quad P(x) = 3x^3 + 18x^2 - 5x - 17$

b) $W(x) = 8 + ax(ax + 1) - (a^2 + x - 5x^2) \cdot x$ $\quad P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

c) $W(x) = -6x^3 - 5ax^2 - ax - 2$ $\quad P(x) = (3x^2 - a^2x + 2)(-2x - 1)$

d) $W(x) = (2x^2 - 3)(2x - a^2) - 4$ $\quad P(x) = 4x^3 + (a - 3)x^2 - 6x - a$.

8.40. Sprawdź, czy istnieją liczby a i b, dla których wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są równe, jeśli:

a) $W(x) = 2x^3 + (3a + 1)x^2 + (b + 2)x - 4$ $\quad P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 4$

b) $W(x) = (2ax - b)^3$ $\quad P(x) = 8x^3 - 10x^2 + 6x - 1$

c) $W(x) = 2ax(2x - b)^2$ $\quad P(x) = 16x^3 - 48x^2 + 36x$

d) $W(x) = (x^2 - ax)^2 - (x^2 + bx)^2$ $\quad P(x) = -2x^3 - 3x^2$.

8.41. Wyznacz współczynniki a i b, dla których wielomiany $W(x) - F(x)$ i $H(x)$ są równe, jeśli:

a) $W(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1,\quad F(x) = 2x^2 + bx - 4,\quad H(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 5$

b) $W(x) = 2x^3 + ax^2 + 5x - 3,\quad F(x) = x^3 - 5x^2 + bx + 4,\quad H(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 7$.

8.42. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby $W(x) \cdot F(x) = H(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^2 + 3x + 2,\quad F(x) = ax + b,\quad H(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

b) $W(x) = 2x^2 - x + 5,\quad F(x) = ax + b,\quad H(x) = -2x^3 + 7x^2 - 8x + 15$.

8.43. Wyznacz współczynniki b i c tak, aby wielomian $W(x) \cdot F(x) - H(x)$ był wielomianem zerowym, jeśli:

a) $W(x) = -3x + 5,\quad F(x) = x^2 + bx + c,\quad H(x) = -3x^3 - x^2 - 2x + 20$

b) $W(x) = 2x - 3,\quad F(x) = x^2 + bx + c,\quad H(x) = 2x^3 + 7x^2 - 13x - 3$.

8.44. Dane są wielomiany: $W(x) = (2x + b)(x^2 + 3x + 1)$, $F(x) = (ax + 3)(x + 1)^2$ oraz $H(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 2$. Wyznacz wartości parametrów a, b, dla których $W(x) - F(x) = H(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

8.45. Dane są wielomiany: $W(x) = (ax - 2)(x + 2)^2$, $F(x) = (2x + b)(x^2 + 3)$ oraz $H(x) = 5x^3 + 11x^2 + 10x - 5$. Dla jakich wartości parametrów a, b wielomian $W(x) + F(x) - H(x)$ jest wielomianem zerowym?

8.46. Wyznacz współczynniki a, b, m, n, dla których wielomiany $W(x)$ i $F(x)$ są równe, jeśli:

a) $W(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + 18x + 9$ $\quad F(x) = (x^2 + ax + b)^2$

b) $W(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 12x + n$ $\quad F(x) = (x^2 + ax + b)^2$

c) $W(x) = x^4 + mx^3 + 5x^2 + nx + 4$ $\quad F(x) = (x^2 + ax + b)^2$

d) $W(x) = x^4 + mx^3 + 6x^2 + nx + 1$ $\quad F(x) = (x^2 + ax + b)^2$.

Wzory skróconego mnożenia stopnia 3. Wzór na $a^n - b^n$

8.47. Zapisz za pomocą sumy algebraicznej wyrażenie:

a) $(y + z)^3$ b) $(2 + a)^3$ c) $(1 + 3x)^3$ d) $(\sqrt[3]{3} + 1)^3$

e) $(5 - b)^3$ f) $(x - 4)^3$ g) $(2x - 3)^3$ h) $(1 - \sqrt[3]{2})^3$.

8.48. Oblicz sześcian danej liczby.

a) $1 - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{6} + 2$ c) $3\sqrt{2} - 1$ d) $4\sqrt{2} + \sqrt{6}$

e) $2 + \sqrt[3]{2}$ f) $-\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ g) $2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ h) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{25}$

8.49. Zapisz za pomocą sumy algebraicznej wyrażenie:

a) $(x + a)(x^2 - ax + a^2)$ b) $(3 + x)(9 - 3x + x^2)$

c) $(y + 4)(16 - 4y + y^2)$ d) $(2 - y)(4 + 2y + y^2)$

e) $(25 + 5x + x^2)(x - 5)$ f) $(\sqrt{2} - z)(z^2 + 2 + \sqrt{2}z)$.

8.50. Oblicz:

a) $(2 - \sqrt[3]{5})(4 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25})$ b) $(1 - 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4})(1 + 2\sqrt[3]{2})$

c) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$ d) $(4\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{81})(\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{2})$

8.51. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $(x-1)^3+(2-x)^3$
b) $(2+x)^3+2(x-1)^3$
c) $(x+1)(x^2-x+1)+(1-x)^3$
d) $3(x-2)(x^2+2x+4)-(x+3)^3$
e) $(x+4)^3-(4-x)(x^2+4x+16)$
f) $\left(\sqrt[3]{5}+x\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}-x\right)^3-6\sqrt[3]{25}x$

8.52. Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych:

a) $(x+1)^3-(2x-3)^2-(x+3)^2+2(x-2)(x+2)$
b) $(2x-5)^2(x-1)-(3x+1)^2(x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$
c) $(2x-1)^3-(x+1)^3+(x+2)^3-(x+2)(x^2-2x+4)$
d) $(2x-3y)^2-(3x-y)(3x+y)+(x-2y)^2-(8x-7y)(-2y)$
e) $(x^2-1)^3-(x-1)(x^2+1)(x+1)+4x^2(x^2+1)$
f) $(3x-1)^3-3(x+1)(x^2-x+1)+2(x-2)^3$.

8.53. Rozwiąż równanie:

a) $(x-1)^3+35=4(x+1)^2-(2-x)(4+2x+x^2)$
b) $(2+x)^3+9x=10-(2-x)^3+(2x-1)^2$
c) $2(3x-5)^2+3(x+1)(x^2-x+1)=(x+3)^3+2x(x^2-25)+72$
d) $(x-4)^3-12(x+2)^2+20x(x-4)=-9-(x^2+3x+9)(3-x)$.

8.54. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-2)^3+7x^2+(2+x)(x^2-2x+4)>2x^3+12x+25$
b) $(x-4)(x^2+4x+16)-2(x-1)^3\geq 5(x-4)(x+3)-x^3$
c) $x^2(x-5)-(x-2)^3\leq 3x-12(x-1)$
d) $(3+x)^3+(2x-1)(4x^2+2x+1)-11(3x+4)<9x^2(x+1)-(x^2+2)$.

8.55. Zamień na iloczyny wyrażenia:

a) x^3-3x^2+3x-1
b) $x^3+18x^2+108x+216$
c) $27-27y+9y^2-y^3$
d) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$
e) $1+6x+12x^2+8x^3$
f) $1-15y+75y^2-125y^3$.

8.56. Zamień na iloczyny wyrażenia:

a) y^3+8
b) $1-x^3$
c) $27z^3-1$
d) $8k^3-125$
e) $64+27y^3$
f) $125a^3+216$
g) $5\sqrt{5}+x^3$
h) $y^3-2\sqrt{2}$.

8.57. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$
b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$
c) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}}$
d) $\frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$
e) $\frac{2}{3+\sqrt[3]{5}}$
f) $\frac{7}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}$
g) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+1}$
h) $\frac{\sqrt[3]{3}-2}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$

8.58. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $|4-x|=\left(\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}+9\right)\left(\sqrt[3]{2}+3\right)$
b) $\left(\sqrt[3]{6}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}\right)<|x+5|$
c) $3|-x-2|\leq\left(2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{10}\right)\left(\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{50}+4\sqrt[3]{25}\right)$
d) $\left(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4\right)\left(\sqrt[3]{3}-2\right)=|3x+2|$
e) $|3-x|\geq\left(\sqrt[3]{4}-2\right)\left(4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)$
f) $2|x+1|-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{4}-2+\sqrt[3]{16}\right)>3|x+1|$.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu

D **8.59.** Wykaż, że liczba 207^3+148^3 jest podzielna przez 71.

D **8.60.** Wykaż, że liczba 536^3-124^3 jest podzielna przez 103.

D **8.61.** Wykaż, że jeśli liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to sześcian tej liczby przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

D **8.62.** Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, zaś liczba całkowita b przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Wykaż, że suma sześcianów tych liczb jest podzielna przez 4.

D **8.63.** Liczba całkowita c przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2. Wykaż, że liczba $4+c^3$ jest podzielna przez 12.

D 8.64. Liczba całkowita c przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby $c^3 - 2$ przez 3 jest równa 2.

D 8.65. Wykaż, że jeśli liczba parzysta jest niepodzielna przez 6, to sześcian tej liczby przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2 lub 4.

D 8.66. Wykaż, że jeśli $a - b = 5$ i $a \cdot b = 7$, to $a^3 - b^3 = 230$.

D 8.67. Wykaż, że jeśli $a + b = 4$ i $a \cdot b + 9 = 0$, to $a^3 + b^3 - 172 = 0$.

D 8.68. Wykaż, że liczba $\left(1-\sqrt{2}\right)^3\left(7+5\sqrt{2}\right)$ jest liczbą całkowitą.

D 8.69. Wykaż, że liczba $\left(26-15\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^3$ jest liczbą naturalną.

D 8.70. Wykaż, że liczba $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$ jest liczbą naturalną.

D 8.71. Wykaż, że liczba $209^{21} - 45^{21}$ jest podzielna przez 164.

D 8.72. Wykaż, że liczba $384^{58} - 120^{58}$ jest podzielna przez 11.

D 8.73. Wykaż, że liczba $26^{24} - 15^{24}$ jest podzielna przez 41.

D 8.74. Wykaż, że liczba $3^{18} - 2^{18}$ jest podzielna przez 19.

D 8.75. Wykaż, że liczba $3^{16} - 2^{16}$ jest podzielna przez 13.

D 8.76. Wykaż, że liczba $8^{15} - 5^5$ jest podzielna przez 13.

D 8.77. Wykaż, że liczba $6^{21} - 9^{14}$ jest podzielna przez 15.

D 8.78. Wykaż, że liczba $2^{35} - 3^{28}$ jest wielokrotnością liczby 7.

D 8.79. Wykaż, że liczba:

a) $\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1\right)\left(\sqrt[3]{16}-1\right)\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1\right)$ jest liczbą naturalną, podzielną przez 15.

b) $\left(\sqrt[3]{81}-4\right)\left(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4\right)\left(\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{9}+4\right)$ jest liczbą naturalną, podzielną przez 17.

D 8.80. Wykaż, że liczba $\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}$ jest liczbą całkowitą parzystą.

D 8.81. Wykaż, że dana liczba jest całkowita.

a) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt{3}$
b) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}-\sqrt{2}$

D 8.82. Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej a przez 6 jest równa 1. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby 3^a przez 13 jest równa 3.

D 8.83. Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej b przez 4 jest równa 3. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby 2^b przez 12 jest równa 8.

Podzielność wielomianów

8.84. Podaj przykład wielomianu pierwszego stopnia, przez który jest podzielny wielomian $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 - 1$
b) $W(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
c) $W(x) = 81 - x^4$
d) $W(x) = 8 + 125x^3$
e) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
f) $W(x) = x^5 - 32$
g) $W(x) = 27x^6 - 64$
h) $W(x) = 4x^4 - 4x^2 + 1$.

8.85. Wskaż cztery wielomiany pierwszego stopnia, przez które jest podzielny wielomian $W(x)$, jeśli $W(x) = (4x^2 - 9)(x^2 - 4x - 5)$.

8.86. Wskaż pięć wielomianów pierwszego stopnia, przez które jest podzielny wielomian $W(x)$, jeśli $W(x) = (x^3 + 125)(6x^2 + 13x - 10)(4x^2 - 9)$.

8.87. Podaj przykład wielomianu drugiego stopnia, przez który jest podzielny wielomian $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = (x + 1)(x^4 + 8)(x - 3)$
b) $W(x) = 27x^3 - 1000$
c) $W(x) = 125x^3 + 216$
d) $W(x) = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$.

8.88. Dany jest wielomian $W(x) = -3x^2(4 - x)(x + 2)$. Wskaż trzy wielomiany stopnia trzeciego, przez które jest podzielny wielomian $W(x)$.

8.89. Dany jest wielomian $W(x) = (9x^2 - 1)(x^2 - 4x)$. Podaj przykład wielomianu:

a) stopnia pierwszego b) stopnia drugiego

c) stopnia trzeciego d) stopnia czwartego,

przez który jest podzielny wielomian $W(x)$.

8.90. Podaj przykład wielomianu $F(x)$ stopnia pierwszego i takiego, że wielomian $W(x) = (x^2 + 10x + 25)\cdot F(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 4x - 5$.

8.91. Podaj przykład wielomianu $F(x)$ stopnia pierwszego i takiego, że wielomian $W(x) = (8x^3 - 1)\cdot F(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

8.92. Podaj przykład wielomianu $F(x)$ takiego, że wielomian $W(x) = (3 - x)(4 + 5x)\cdot F(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = -x^2 + 9x - 18$.

8.93. Podaj przykład wielomianu $F(x)$ takiego, że wielomian $W(x) = (x + 2)(x^2 - x - 6)\cdot F(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

8.94. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$. Wielomian $Q(x) = 4 + 3x$ jest ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$. Wyznacz $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = 16 - 9x^2$ b) $W(x) = 9x^2 + 24x + 16$ c) $W(x) = -3x^2 - x + 4$.

8.95. Wielomian $W(x) = -10x^3 + 11x^2 + ax + b$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 1 - 2x$. Ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = 5x^2 - 3x + 2$. Oblicz a i b.

8.96. Wielomian $W(x) = -3x^3 + (3a + b)x^2 - (4a + 9b)x + 30$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = -3x + 5$. Ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = x^2 - 4x + 6$. Oblicz a i b.

8.97. Wielomian $W(x) = -6x^4 + (a - b)x^3 - 21x^2 + (2a - 3b)x - 15$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = -2x^2 + x - 3$. Oblicz a i b.

8.98. Wielomian $W(x) = 6x^3 - x^2 + 10x - 8$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$. Ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = 2x^2 + x + 4$. Wyznacz $P(x)$.

8.99. Wielomian $W(x) = 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 10x - 15$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$. Ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. Wyznacz $P(x)$.

8.100. Wielomian $W(x) = (8x^3 - 27)(2x - 7)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$. Ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = 4x^2 + 6x + 9$. Wyznacz $P(x)$.

8.101. Wielomian $W(x) = (x^3 + 216)(3x + 5)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 3x^2 + 23x + 30$, a ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x)$. Wyznacz $Q(x)$.

8.102. Wielomian $W(x) = (2x - 3)^2(3x + 1)^2$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 6x^2 - 7x - 3$, a ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x)$. Wyznacz $Q(x)$.

8.103. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$, a ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x)$. Wyznacz wielomian $Q(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^6 - 2x^4 + 2x^3 - 2x + 1$, $P(x) = (x^3 - 2x + 1)$

b) $W(x) = x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2$, $P(x) = (x^4 + x^2 - 2)$

8.104. Wielomian $W(x) = (x^2 - 3x + 1)^2 - (x^2 + 2x - 2)^2$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$. Ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $Q(x) = -5x^2 + 8x - 3$. Wyznacz $P(x)$.

8.105. Wielomian $W(x) = (x^3 - 2x + 3)^2 - (x^2 + 3x)^2$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^3 + x^2 + x + 3$. Wielomian $Q(x)$ jest ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Wyznacz $Q(x)$.

8.106. Wielomian $W(x) = (x^3 - 6)^2 - 4(x^3 + 1)^2$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$. Wielomian $Q(x) = x^2 - 2x + 4$ jest ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$. Wyznacz $P(x)$.

D **8.107.** Uzasadnij, że wielomian:

a) $W(x) = (6x^2 + 19x + 2)^2 - (x^2 + 5x + 5)^2$ jest podzielny przez dwumian liniowy $P(x) = 5x - 1$

b) $W(x) = (3x - 1)^3 - (x - 2)^3$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 13x^2 - 17x + 7$.

W każdym przypadku wyznacz iloraz $Q(x)$ z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.

Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy. Schemat Hornera

8.108. Wykonaj dzielenie:

a) $(x^3 - 6x^2 + 12x - 16) : (x - 4)$
b) $(x^3 - x^2 - 5x + 21) : (x + 3)$
c) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 2) : (x - 2)$
d) $(x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1) : (x - 1)$.

8.109. Wykonaj dzielenie:

a) $(100x^3 - 120x^2 + 47x - 6) : \left(x - \frac{2}{5}\right)$
b) $(38x^3 + 7x^2 - 8x - 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$
c) $(16x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1) : \left(x + \frac{1}{4}\right)$
d) $(2x^5 + 3x^4 - 2x - 3) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$.

8.110. Wykonaj dzielenie:

a) $(2x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 5x - 6) : (2x - 3)$
b) $(12x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 6x + 1) : (4x - 1)$
c) $(-2x^4 + x^3 - 16x^2 + 4) : (-2x + 1)$
d) $(-3x^4 + 2x^3 - 12x + 8) : (-3x + 2)$.

8.111. Wykonaj dzielenie z resztą:

a) $(3x^2 - 2x + 1) : (x + 2)$
b) $(-2x^3 + 4x - 3) : (x - 1)$
c) $(4x^4 + 3x^2 - 6x + 3) : (x + 1)$
d) $(-3x^4 + 2x^3 + 4) : (x - 3)$
e) $(x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 1) : (x + 3)$
f) $(x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 1) : (x - 2)$.

8.112. Wykonaj dzielenie, stosując schemat Hornera:

a) $(x^3 + 2x^2 + x - 4) : (x - 1)$
b) $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) : (x + 2)$
c) $(3x^3 - 4x^2 - x - 6) : (x - 2)$
d) $(2x^3 + 7x^2 + 8x + 15) : (x + 3)$.

8.113. Wykonaj dzielenie, stosując schemat Hornera:

a) $(3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$
b) $(2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 3) : (x - 0{,}5)$
c) $(3x^4 - x^3 + 6x^2 + 7x - 3) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$
d) $(5x^4 + 9x^3 - 2x^2 + 5x - 1) : \left(x - \frac{1}{5}\right)$.

8.114. Wykonaj dzielenie, stosując schemat Hornera:

a) $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$
b) $(2x^3 + x + 18) : (x + 2)$
c) $(-x^3 + 4x + 3) : (x + 1)$
d) $(5x^3 - 7x - 26) : (x - 2)$
e) $(2x^4 - 5x + 3) : (x - 1)$
f) $(-3x^4 + 2x^2 + 1) : (x + 1)$.

8.115. Wykonaj dzielenie z resztą, stosując schemat Hornera:

a) $(3x + 5) : (x + 4)$
b) $(-4x + 1) : (x - 7)$
c) $(x^3 - 1) : (x + 2)$
d) $(3x^4 - 2x + 8) : (x - 2)$
e) $(5x^5 + 2x^3 + 7) : (x - 1)$
f) $(-2x^5 + 4x^3 + 6) : (x + 3)$.

8.116. Wykonaj dzielenie:

a) $(2x^6 + 3x^2 - 15) : (x - 1)$
b) $(-3x^4 + 2x + 16) : (x - 2)$
c) $(x^5 + 1) : (x + 1)$
d) $(x^6 - 1) : (x + 1)$
e) $(x^7 + 1) : (x - 1)$
f) $(x^8 - 1) : (x - 1)$.

8.117. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$, $P(x) = x - 2$
b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 4$, $P(x) = x + 1$
c) $W(x) = -3x^6 + 4x^4 + 9$, $P(x) = x - 1$
d) $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $P(x) = x + 3$.

8.118. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + (k^2 + 1)x^2 - 2kx - 15$.

a) Dla $k = 1$ oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 3$.

D b) Uzasadnij, że jeśli $k = -5$ lub $k = 3$, to wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$.

8.119. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = m^2x^8 - 5x^4 - 3m$ przez dwumian $x - 1$ jest równa -1. Oblicz m.

8.120. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = m^2x^6 - 8x^3 + 5m$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 2. Oblicz m.

8.121. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 + a^2x + 2$ przez dwumian $x - 1$ jest większa od 3.

8.122. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbb{R}$, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^3 - \frac{1}{4}ax^2 + a^2x + 1$ przez dwumian $x - 2$ jest mniejsza od 4.

Dzielenie wielomianu przez wielomian stopnia większego od 1

8.123. Wykonaj dzielenie:

a) $(6x^3 + 13x^2 + x - 2) : \left(x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1\right)$

b) $(8x^3 - 6x^2 - 17x - 6) : (8x^2 - 10x - 12)$

c) $(24x^3 - 26x^2 + 9x - 1) : (12x^2 - 7x + 1)$

d) $(12x^3 + 16x^2 + 7x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

8.124. Wykonaj dzielenie:

a) $(x^5 + 3x^3 + 2x) : (x^2 + 1)$

b) $(x^6 + x^4 - 2x^3 - 3x - 3) : (x^3 + x + 1)$

c) $(x^4 - 9x^2) : (3x^2 + 9x)$

d) $(x^4 - 2x^2 - 8) : (2x^3 - 4x^2 + 4x - 8)$

e) $(x^5 + x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 15) : (x^2 + 3)$

f) $(x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1) : (x^2 + 2x + 1)$.

8.125. Wyznacz iloraz $Q(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia:

a) $(x^5 + x^2 - 6x + 8) : (x^3 - 3x + 1)$

b) $(x^3 + 5) : (x^4 + 5)$

c) $(4x^3 - 3x - 1) : (4x^2 + 4x + 1)$

d) $(3x^6 - 6x^5 + 13x^4) : (6x^3 + 4x + 2)$

e) $(8x^3 + 4x^2 - 1) : (2x^3 - 5x^2 + 1)$

f) $(2x^5 + x^3 - 2x^2 - 1) : (2x^2 + 1)$.

8.126. Wyznacz iloraz $Q(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia:

a) $(x^8 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5) : (x^2 - 1)$

b) $(2x^4 - x^3 + 3x^2 + 7) : (x^5 + 2)$

c) $(x^8 + x^6 + 2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - x) : (x^3 + 2)$

d) $(2x^7 - 3x^6 + 4x^4 - x^2 + 2x + 4) : (2x^5 + x^4 - 1)$

e) $(x^9 + x^7 - 4x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 7x - 1) : (x^5 + x^3 - 3x + 2)$

f) $(x^9 - 3x^8 - 3x^7 + 9x^6 + 2x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3) : (x^4 - 3x^2 + 2)$.

8.127. Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = -2x^2 + 1$ i resztę $R(x) = x^2 + 5x + 6$. Wyznacz wielomian $W(x)$ w postaci uporządkowanej.

8.128. Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = 2x^3 + 5x - 1$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 5x - 7$ resztę $R(x) = 3x^2 - x$. Wyznacz wielomian $W(x)$ w postaci uporządkowanej.

8.129. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumian $x + 3$ daje resztę 6, a przy dzieleniu przez dwumian $x - 2$ daje resztę 1. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = (x - 2)(x + 3)$.

8.130. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumian $x + 2$ daje resztę 8, a przy dzieleniu przez dwumian $x + 1$ daje resztę -4. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez trójmian kwadratowy $P(x) = x^2 + 3x + 2$.

8.131. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian kwadratowy $P(x) = (x + 4)(x - 2)$ jest równa $-5x + 2$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 4$.

8.132. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3 - 1$ jest trójmianem kwadratowym $2x^2 - 3x - 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$.

8.133. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$ jest równa $3x^2 + 5x - 2$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $F(x) = (x - 1)(x + 2)$.

8.134. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ jest równa $x^3 - 5x + 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $F(x) = x^2 - 4$.

8.135. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ przez wielomian $P(x) = (x - 1)(x + 2)$ jest równa $9x - 3$. Oblicz a i b.

8.136. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + (a + b)x^3 + 2x^2 + bx + 6$ przez wielomian $P(x) = x^2 + 4x + 3$ jest równa $x + 9$. Oblicz a i b.

8.137. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $x + 1$, $x + 2$, $x - 1$ daje reszty odpowiednio równe: 2, 3 i 6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

8.138. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $x - 2$ i $x + 4$ daje reszty odpowiednio -3 oraz -51. Wiedząc, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$.

8.139. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 3x + b$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 3x + 3$ jest wielomianem zerowym. Oblicz a i b.

8.140. Wielomian $W(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + ax + 2$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 2x + b$. Oblicz a i b.

Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bezouta

8.141. Sprawdź, czy podana obok wielomianu $W(x)$ liczba c jest jego pierwiastkiem:

a) $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7, \quad c = 1$
b) $W(x) = 5x^3 - 2x^2 - 6x - 20, \quad c = 2$
c) $W(x) = 6x^4 - 3x^2 + 5x + 3, \quad c = -1$
d) $W(x) = x^4 + 7x^3 + 16x^2 - 24, \quad c = -2.$

8.142. Dany jest wielomian $W(x)$ i zbiór A. Sprawdź, które liczby ze zbioru A są pierwiastkami wielomian $W(x)$.

a) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12, \quad A = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$
b) $W(x) = x^4 - 2x^2 - 3, \quad A = \left\{-\sqrt{3}, -\frac{1}{3}, 1, \sqrt{3}\right\}$

8.143. Wielomian $W(x)$ jest zapisany w postaci iloczynu wielomianów pierwszego i drugiego stopnia. Podaj stopień wielomianu $W(x)$ i wyznacz pierwiastki tego wielomianu.

a) $W(x) = (x-2)(x^2+2x+4)(5-2x)(x^2+1)$
b) $W(x) = (81x^2-4)(x^2-x-6)(3-x)(x+5)$
c) $W(x) = 5x(2x^2+x+1)(9x^2-6x+1)(4+x^2)$
d) $W(x) = (x^2+3x+4)(1-2x+8x^2)(x^2-9)$

8.144. Podaj przykład wielomianu $W(x)$ szóstego stopnia, zapisanego w postaci iloczynowej i którego pierwiastkami są liczby:

a) 0, 1, 2, 3, 4, 5
b) $-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \sqrt{5}$
c) −1, 1, 3
d) −2.

8.145. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12 \quad P(x) = x - 3$
b) $W(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 14 \quad P(x) = x + 2$
c) $W(x) = 5x^5 - 3x^3 - 2x + 9 \quad P(x) = x - 1$
d) $W(x) = -3x^7 + 8x^5 + 4x^2 + 1 \quad P(x) = x + 1.$

8.146. Wyznacz liczbę k, dla której wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = 2x^3 - (3k+2)x^2 + 6kx - 18 \quad P(x) = x + 3$
b) $W(x) = x^3 - (4k+3)x^2 + (6k-1)x + 25 \quad P(x) = x - 5$
c) $W(x) = 2x^3 + 3k^2x^2 + kx - 20 \quad P(x) = x - 2$
d) $W(x) = x^3 + 2x^2 - k^2x + 5k + 7 \quad P(x) = x + 3.$

8.147. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$ wiedząc, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $P(x)$, jeśli:

a) $W(x) = 3x^3 + 20x^2 + 11x - 6 \quad P(x) = x + 1$
b) $W(x) = 2x^3 - 10x^2 + 10x - 8 \quad P(x) = x - 4$
c) $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 20x + 21 \quad P(x) = x + 3$
d) $W(x) = 8x^3 - 6x^2 - 18x - 4 \quad P(x) = x - 2$
e) $W(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \quad P(x) = x - 3$
f) $W(x) = x^3 + 2x - 3 \quad P(x) = x - 1.$

8.148. Dany jest wielomian $W(x)$ i liczba c. Wykaż, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Następnie wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$, o ile istnieją.

a) $W(x) = x^3 - x^2 - 16x - 20, \quad c = -2$
b) $W(x) = x^3 - x^2 - 8x + 8, \quad c = 1$
c) $W(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 \quad c = -3$
d) $W(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 25, \quad c = -5$

8.149. Wykaż, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Następnie wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$, o ile istnieją.

a) $W(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x - 6, \quad c = -2$
b) $W(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad c = 1$
c) $W(x) = 2x^5 + 2x^4 - 20x^3 - 20x^2 + 18x + 18, \quad c = -1$
d) $W(x) = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 30x^2 - 16x + 32, \quad c = 2$

8.150. Wyznacz liczbę a, dla której liczba c jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Dla obliczonej wartości a, podaj pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 - x + a$, $c = 1$

b) $W(x) = 3x^3 - (4a + 5)x^2 + 28x - 4a$, $c = 2$

8.151. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez podany obok wielomianu dwumian. Oblicz a. Następnie wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = 4x^3 + 5x^2 + ax - 2$, $x + \frac{1}{4}$

b) $W(x) = 4x^3 + 6ax^2 + (4a + 2)x - 12$, $x - \frac{1}{2}$

8.152. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$. Oblicz a i b. Następnie znajdź trzeci pierwiastek wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = x^3 - (a + b)x^2 - (a - b)x + 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

b) $W(x) = 2x^3 + (a + b)x^2 + (5b + 2a)x - 8$, $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

8.153. Oblicz wartości współczynników a i b wielomianu $W(x)$ wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez podany obok trójmian kwadratowy $P(x)$. Podaj wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = x^3 + ax^2 - bx + 6$, $P(x) = (x - 1)(x - 2)$

b) $W(x) = 3x^3 + ax^2 - 15x + b$, $P(x) = 3x^2 + 11x - 4$

D **8.154.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n wielomian $W(x) = n \cdot x^{n+1} - (n - 1)x^n - 1$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$.

D **8.155.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n wielomian $W(x) = x^{2n-1} + (n - 1)x^2 + nx + 2$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$.

8.156. Wielomian $W(x)$ jest trzeciego stopnia. Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby: –2, 1 i 4. Wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 30, zapisz wzór wielomianu $W(x)$ w postaci uporządkowanej.

8.157. Wielomian $W(x)$ jest czwartego stopnia, a suma wszystkich jego współczynników wynosi 4. Wyznacz wzór tego wielomianu wiedząc, że jest on podzielny przez wielomian $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ jest równa –140.

8.158. Wielomian $W(x) = x^3 - 9x^2 + mx + n$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = x_1 + 2$ oraz $x_3 = x_1 + 4$. Wyznacz:

a) pierwiastki wielomianu $W(x)$ b) liczby m i n.

8.159. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 27$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = -3x_1$ oraz $x_3 = 9x_1$. Wyznacz:

a) pierwiastki wielomianu $W(x)$ b) liczby a i b.

8.160. Wielomian $W(x) = x^3 - 9x^2 + (b - 5)x - 15$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = x_1 + a$ oraz $x_3 = x_1 + 2a$, gdzie $a \neq 0$. Wyznacz liczby a i b oraz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

8.161. Wielomian $W(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = ax_1$ oraz $x_3 = a^2x_1$, gdzie $a \neq 0$. Wyznacz liczbę a oraz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Pierwiastki wymierne wielomianu

8.162. Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ b) $W(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$

c) $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$ d) $W(x) = 3x^3 + 7x^2 - 4$

e) $W(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ f) $W(x) = 5x^4 + 15x^3 - 19x^2 + 3x - 4$.

D **8.163.** Wykaż, że wielomian $W(x) = 4x^4 + 4x^3 + 11x^2 - x - 3$ nie ma pierwiastków całkowitych.

D **8.164.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ ma tylko całkowite pierwiastki.

8.165. Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ b) $W(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{3}x + 2$

c) $W(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 5x + 12$ d) $W(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 7x + 12$

8.166. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$ wiedząc, że ten wielomian ma pierwiastek całkowity.

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$
b) $W(x) = 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$
c) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36$
d) $W(x) = -2x^3 + 28x - 16$
e) $W(x) = 2x^3 + 4x - 24$
f) $W(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$
g) $W(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x - 2$
h) $W(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 6x + 6$

D **8.167.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbb{Z}$ oraz wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + ax - 2$ ma pierwiastek, będący liczbą pierwszą, to wielomian $W(x)$ ma dwa pierwiastki całkowite.

D **8.168.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbb{Z}$ oraz wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + x - 12$ ma pierwiastek, który jest nieparzystą liczbą pierwszą, to reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 1$ jest równa -12.

D **8.169.** Współczynniki a i b wielomianu $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 5x + 6$ są liczbami całkowitymi, a dwa pierwiastki wielomianu $W(x)$ są liczbami pierwszymi.

a) Oblicz a i b.
b) Wykaż, że wielomian $W(x)$ ma tylko dwa pierwiastki.

8.170. Wielomian $W(x) = x^3 - ax^2 - x + 5$ ma trzy całkowite pierwiastki. Wiedząc, że a jest liczbą pierwszą, wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

8.171. Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = 5x^3 + 4x^2 + 4x - 1$
b) $W(x) = 6x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 2$
c) $W(x) = 12x^3 - 8x^2 - 29x + 15$
d) $W(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$
e) $W(x) = 3x^4 + 11x^3 + 9x^2 - x - 2$
f) $W(x) = 6x^4 + x^3 - 13x^2 - 2x + 2$.

D **8.172.** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 10$ nie ma pierwiastków wymiernych.

D **8.173.** Wykaż, że wielomian $W(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 3$ ma tylko pierwiastki wymierne.

8.174. Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 - 19x + 30$
b) $W(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$
c) $W(x) = 12x^3 + 22x^2 + 12x + 2$
d) $W(x) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}$
e) $W(x) = 2x^4 - \frac{17}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 - \frac{22}{5}x + 1$
f) $W(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{3}{16}$

8.175. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$
b) $W(x) = 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$
c) $W(x) = -2x^3 + 28x - 16$
d) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36$
e) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$
f) $W(x) = 2x^3 + 4x - 24$
g) $W(x) = 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 15x - 6$
h) $W(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$.

8.176. Wykaż, że dana liczba jest niewymierna.

a) $\sqrt[4]{5}$
b) $2\sqrt[3]{3}$
c) $\sqrt[7]{4}$
d) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$

8.177. Wykaż, że dana liczba jest naturalna.

a) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$
b) $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$

Pierwiastek wielokrotny

8.178. Podaj pierwiastki wielomianu $W(x)$ i określ krotność każdego z nich.

a) $W(x) = (2x - 1)(x^3 + 8)(x - 9)^2$
b) $W(x) = (3x + 2)(9x^2 + 12x + 4)(4 - 9x^2)(x + 5)$
c) $W(x) = (x^2 - 4)^3(x^2 - x - 6)(x^2 - 9)$
d) $W(x) = (x^3 - 27)^2(2x^2 - 3x - 9)(x^4 - 3x^3)(2x + 3)$

8.179. Podaj pierwiastki wielomianu $W(x)$ i określ krotność każdego z nich.

a) $W(x) = (x^2 + 4x + 4)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)(x^2 - 4)$
b) $W(x) = (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)(1 - 4x^2)(8x^3 - 1)$

8.180. Wielomian $W(x)$ jest stopnia trzeciego i ma trzy pierwiastki: -2, -1 oraz 4. Czy wielomian $P(x) = W(x) \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$ ma pierwiastki wielokrotne? Jeśli tak, podaj ich krotności.

8.181. Wielomian $W(x)$ jest stopnia drugiego i ma pierwiastek dwukrotny, równy 2. Czy wielomian $P(x) = [W(x)]^3 \cdot (x^2 - 4)$ ma pierwiastek wielokrotny? Jeśli tak, to podaj jego krotność.

D 8.182. Wykaż, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Następnie określ krotność tego pierwiastka.

a) $W(x) = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5$, $a = -\frac{1}{2}$

b) $W(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 24x - 24$, $a = -2$

D 8.183. Wykaż, że liczba c jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$, $c = 1$

b) $W(x) = x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 5x^2 + 30x + 45$, $c = -3$

D 8.184. Wykaż, że liczba p jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$, $p = 2$

b) $W(x) = 27x^5 - 27x^4 + 36x^3 - 28x^2 + 9x - 1$, $p = \frac{1}{3}$

8.185. Podaj przykład wielomianu stopnia ósmego, który ma tylko dwa pierwiastki: -3 i 4, przy czym -3 jest pierwiastkiem trzykrotnym, a 4 jest pierwiastkiem jednokrotnym.

8.186. Podaj przykład wielomianu stopnia siódmego o współczynnikach całkowitych, który ma tylko trzy pierwiastki: 3, 4 oraz $-\frac{1}{2}$, przy czym 4 jest pierwiastkiem jednokrotnym, $-\frac{1}{2}$ – pierwiastkiem dwukrotnym, a 3 – pierwiastkiem czterokrotnym.

8.187. Wyznacz liczbę a wiedząc, że wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek dwukrotny.

a) $W(x) = (4x^2 + 12x + a)x$
b) $W(x) = x^3 + ax^2 + 25x$
c) $W(x) = ax^3 - 8x^2 + x$
d) $W(x) = -4x^4 + 4x^3 + ax^2$

8.188. Wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek trzykrotny. Oblicz a i b, jeśli:

a) $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$
b) $W(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$
c) $W(x) = 27x^3 + ax^2 + bx + 8$
d) $W(x) = 8x^3 + ax^2 + 150x + b$.

8.189. Liczba p jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Oblicz a i b, jeśli:

a) $W(x) = x^3 - ax^2 + bx + 12$, $p = 2$

b) $W(x) = x^4 + (a - b)x^3 + (a + b)x^2 + 8x + 8$, $p = -2$.

8.190. Liczba k jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznacz liczby a i b, jeśli:

a) $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$, $k = 1$

b) $W(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + (a - b)x + a + 2b$, $k = -1$.

8.191. Liczba m jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Wyznacz liczby a, b, c, jeśli:

a) $W(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$, $m = 1$

b) $W(x) = x^4 + 5x^3 + ax^2 - bx - c$, $m = -2$.

8.192. Dany jest wielomian $W(x) = (3x^2 - x - 2)(kx + 2)$, gdzie $k \neq 0$.

a) Dla $k = -2$ podaj pierwiastki wielomianu $W(x)$ i ustal ich krotność.

b) Dla jakiej wartości k liczba $-\frac{2}{3}$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$?

8.193. Dany jest wielomian $W(x) = (2x - k) \cdot [(k + 3)x^2 - 4x + k]$, gdzie $k \neq -3$.

a) Dla $k = 0$ podaj pierwiastki wielomianu $W(x)$ i ustal ich krotność.

b) Wyznacz wartość k tak, aby wielomian $W(x)$ miał pierwiastek trzykrotny. Jaki to pierwiastek?

8.194. Dany jest wielomian $W(x) = (x + 1) \cdot [x^2 + (p + 3)x + 9]$. Ustal krotność pierwiastków tego wielomianu, ze względu na wartość parametru p, $p \in \mathbb{R}$.

8.195. Dany jest wielomian $W(x) = (x^2 - 4x + 4) \cdot [x^2 - (p + 1)x + 4]$. Ustal krotność pierwiastków tego wielomianu, ze względu na wartość parametru p, $p \in \mathbb{R}$.

Rozkładanie wielomianów na czynniki

8.196. Rozłóż wielomiany na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $625x^4 - 1$
b) $x^4 - 2x^2 + 1$
c) $-4 - 20x^2 - 25x^4$
d) $81x^4 - 16$
e) $(x - 4)^2 - (2x + 1)^2$
f) $9x^2 - 6x + 1 - (2x + 5)^2$

8.197. Rozłóż wielomiany na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$
b) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
c) $1 + 8x^3$
d) $216x^3 - 125$
e) $(x - 5)^3 - 8x^3$
f) $27x^3 - (2x + 1)^3$

8.198. Rozłóż dane wielomiany na czynniki, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.

a) $4x^4 - 4x^3 + x^2$
b) $(x^2 + 2)(2x - 3) + 5x(x^2 + 2)$
c) $x(3x^2 + 1) - 4(3x^2 + 1)$
d) $(5x - 1)(x^2 + 1) + (5x - 1)(6 - 2x^2)$
e) $(2x - 5)x^2 - 3x(2x - 5)$
f) $9(x - 4) + (x - 4)x^2 + 6x(x - 4)$

8.199 Rozłóż dane wielomiany na czynniki, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.

a) $5x^2(x - 1) + 7x(1 - x) + 2(x - 1)$
b) $-2x^2(2 - x) + 3x(x - 2) + 2(2 - x)$
c) $(4x - 1)^2x + (1 - 4x)x^2 - (4x - 1)$
d) $x(x + 5) - x^2(x + 5) - 2(-x - 5)$
e) $(-1 - x)(x^2 - 1) - (x + 1)^2$
f) $(x^2 - 9)x - (x - 3)^2$

8.200. Zamień sumę algebraiczną na iloczyn, stosując metodę grupowania wyrazów.

a) $a(x + y) + bx + by$
b) $ax + bx - ay - by$
c) $cx - cy - ay + ax$
d) $x^2 - xy + ax - ay$
e) $y^2 + 2xy - 2x - y$
f) $3ac - bc - b + 3a$

8.201. Rozłóż dane wielomiany na czynniki, stosując grupowanie wyrazów.

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
b) $7x^3 + 2x^2 - 21x - 6$
c) $3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$
d) $x^3 - x^2 + x - 1$
e) $4x^3 + 4x^2 - x - 1$
f) $-9x^3 - 18x^2 + x + 2$

8.202. Rozłóż dane wielomiany na czynniki, stosując grupowanie wyrazów.

a) $9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$
b) $5x^3 - 4x^2 - 5x + 4$
c) $16x^3 + 16x^2 - 4x - 4$
d) $18x^3 + 9x^2 - 18x - 9$
e) $3x^3 - 7x^2 - 27x + 63$
f) $10x^3 + 15x^2 + 8x + 12$

8.203. Rozłóż dane wielomiany na czynniki, stosując grupowanie wyrazów.

a) $-3x^3 - 4x^2 + 12x + 16$
b) $20x^3 + 12x^2 - 45x - 27$
c) $-4x^3 + 2x^2 - 6x + 3$
d) $-6x^3 - 16x^2 + 3x + 8$
e) $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x$
f) $3x^4 - x^3 - 15x^2 + 5x$

8.204. Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

a) $x^4 + 2x^3 - x - 2$
b) $8x^4 + 24x^3 + x + 3$
c) $x^4 - x^3 - 27x + 27$
d) $125x^4 - 125x^3 - 8x + 8$
e) $8x^4 + 8x^3 - x - 1$
f) $3x^4 + 2x^3 - 24x - 16$

8.205. Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

a) $(x + 2)(x + 2) - 4x - 8$
b) $(x - 3)(x + 3) - 4x + 12$
c) $2x - 14 + 5(x - 7)x^2$
d) $3x^3 - 4x^2 - (3x - 4)^2$
e) $2x + 3 - (4x + 6)(2x - 3)$
f) $2 + x + (4 + 2x)^2$

8.206. Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

a) $x^2 - 1 + (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
b) $3(x + 5)^3 - (x^2 + 10x + 25)$
c) $(x^2 + 8x + 16)x^2 - (x + 4)^2$
d) $4 - x^2 - (x - 2)(x + 2)(x - 3)$
e) $x^3 - 8 + (x - 2)(x^2 - 3x + 1)$
f) $(3x + 1)(2x^2 + 5) + 27x^3 + 1$

8.207. Rozłóż dany wielomian na czynniki wiedząc, że ma on całkowity pierwiastek.

a) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$
b) $x^3 + 3x - 4$
c) $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$
d) $x^3 - 7x^2 + 11x - 5$
e) $2x^3 - x^2 - 7x + 6$
f) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$

8.208. Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6$
b) $2x^7 - 4x^5 + 2x^3$
c) $27 - (4x + 1)^3$
d) $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$
e) $5x^4 + 8x^3 + x^2 - 2x$
f) $3\sqrt{2}x^3 - x^2 - 27\sqrt{2}x + 9$

8.209. Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

a) $(x + 3)^3 + 4(x + 3)^2 + 4(x + 3)$
b) $(2x - 3)^3 - 2(2x - 3)^2 + (2x - 3)$
c) $(4x - 5)^3 - 9(4x - 5)$
d) $3(x - 2)^3 - (x^2 - 4)(x - 2)$
e) $(4x - 1)^3 - (3x + 2)^3$
f) $(2x + 3)^3 - 8x - 12$

8.210. Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

a) $2x^4 - x^2 - 1$
b) $-x^4 + 10x^2 - 9$
c) $x^6 - 7x^3 - 8$
d) $(x^2 - 3x)^2 - 9x^2$
e) $9x^2 - (x^2 + 2)^2$
f) $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 + 4$

8.211. Uzasadnij, że dany wielomian nie ma pierwiastków. Następnie rozłóż ten wielomian na czynniki stopnia drugiego.

a) $x^4 + 1$
b) $3x^4 + 27$
c) $x^4 + x^2 + 1$
d) $x^4 - 3x^2 + 9$

8.212. Dany wielomian rozłóż na czynniki.

a) $x^6 - 1$ b) $x^6 + 1$ c) $256 - x^8$ d) $x^{12} - 2x^6 + 1$

8.213. Dany wielomian rozłóż na czynniki.

a) $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$ b) $(x^2 + 9)^4 - 16x^4$

c) $x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 22x + 12$ d) $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 48x + 36$

e) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$

8.214. Przedstaw wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych.

a) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ b) $W(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3$

Równania wielomianowe

8.215. Rozwiąż równanie:

a) $x^3 - 8 = 0$ b) $x^3 + 64 = 0$ c) $x^5 + 1 = 0$

d) $81x^4 - 1$ e) $x^6 - 64 = 0$ f) $x^8 + 2x^4 + 1 = 0$

8.216. Rozwiąż równanie:

a) $(4 - x)(x + 5)(2x - 3) = 0$ b) $(x^2 - 4x + 1)(x^2 + 5)(8 - x^3) = 0$

c) $(x^2 + 6x + 2)(8x^2 - 4x) = 0$ d) $(9x^2 - 25)(125x^3 + 216) = 0$

e) $(2x^2 + x + 1)(3x^2 + 12) = 0$ f) $(x^4 - 256)(3x^2 - 6)(x^3 + 27) = 0$

8.217. Rozwiąż równanie:

a) $x^2(x^2 - 4) = 3(x^2 - 4)$ b) $-5(x^2 - 3x) = x^2(3x - x^2)$

c) $x^2(4 - x) + 9x - 36 = 0$ d) $4x^2(3 - 2x) + 4x^2 = 6x$

e) $(x - 1)^2 - 2x(x - 1) = 1 - x$ f) $9x^2(x + 2) + 6x(x + 2) = -x - 2$

8.218. Rozwiąż równanie:

a) $x^5 - x^3 - x^2 + 1 = 0$ b) $8x^5 - 32x^3 - x^2 + 4 = 0$

c) $2x^5 + 3x^3 - 16x^2 - 24 = 0$ d) $x^5 - x^3 - 125x^2 + 125 = 0$

e) $8x^5 - 128x^3 + x^2 - 16 = 0$ f) $-27x^5 + 54x^3 - x^2 + 2 = 0$

8.219. Rozwiąż równanie:

a) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 = 12x$ b) $3x^5 - 2x^4 + 2 - 3x = 0$

c) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ d) $x^4 + 4x^3 = 5x^2 + 20x$

e) $x^3 - 8 = (x - 2)(x + 6)$ f) $x^5 - 2x^3 = (2 - x^2)x^2$

8.220. Rozwiąż równanie:

a) $x^4 - 12 = x^2$ b) $(x^2 + 1)(x^2 + 5) = 2x^2 + 2$

c) $x^3(x^3 - 7) = 8$ d) $x^4 + 8 = 9x^2$

e) $(x^3 + 1)^2 = 81x^6$ f) $10x^6 - 7x^3 + 1 = 0$

8.221. Rozwiąż równanie:

a) $4x(x^2 - 1) + (x + 1) = 0$ b) $x - 3 + 2x(x^2 - 9) = 0$

c) $x^3 - 13x - 12 = 0$ d) $x^3 - 5x + 12 = 0$

e) $4x^3 - 1 = 3x$ f) $x^3 - 5x + 2 = 0$

8.222. Rozwiąż równanie:

a) $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$ b) $x^3 - 9x^2 + 23x = 15$

c) $7(x^2 - x^3) = 9 - 5x^3$ d) $x(x^2 + 1) - 2(2x^2 - 3) = 0$

e) $4(3x^2 + 5x + 6) = x^2(x^2 - 3x - 2)$ f) $2(3x^3 + 5) = 7x(4x + 1) + x^2$

8.223. Rozwiąż równanie:

a) $(x^2 - 3)^2 = 4x^2$ b) $(x^3 - 2)^2 = 36$

c) $x^3 - 8(x - 1)^3 = 0$ d) $x^4 - (3x^2 + 2)^2 = 0$

e) $64x^3 + (x + 5)^3 = 0$ f) $125x^3 = (x + 1)^3$

8.224. Rozwiąż równanie:

a) $x^3(x^2 - 25) = 200x - 8x^3$ b) $2(x^4 + 3) = 13x^2$

c) $x^6 - 26x^3 = 27$ d) $(x + 1)(x - 4) = x^3 + 1$

e) $(2x - 1)(x^2 - 1) = 5{,}5(x + 1)$ f) $x^3 - 21x + 20 = 0$

8.225. Rozwiąż równanie:

a) $8\sqrt{3}x^3 - 20x^2 = 2\sqrt{3}x - 5$ b) $x^7 - 5x^5 + 4x^3 = 0$

c) $(4x - 3)(x^2 - 4) = (3x^2 - 12)(3 + 2x)$ d) $x^2(2x - 1) = (6x - 3)(1 - 2x)$

e) $7x^2 = 2x^3 + 9$ f) $3x^3 + 5x^2 - 12x - 20 = 0$

8.226. Rozwiąż równanie:

a) $5x^5 + 4x^4 = 5x + 4$
b) $2(x^3 + 1) + 7x^2 + 7x = 0$
c) $x^7 - x^5 = 16x^5 - 16x^3$
d) $(3x + 1)(x^2 - 9) = 4(3 - x)$
e) $x^8 + x^4 = 2$
f) $x^6 = 40 - 3x^3$

8.227. Rozwiąż równanie:

a) $3x(x + 3) = 2(x^3 + 5)$
b) $6x^3 - 13x^2 = 2 - 9x$
c) $2x^2(x^2 - x - 20)(x^3 - 125) = 0$
d) $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$
e) $(5x - 7)x^2 + 4(5x - 7) = 20x^2 - 28x$
f) $6x^3 - 11x^2 - 12x + 5 = 0$

8.228. Rozwiąż równania:

a) $24x^3 - 2x^2 - 9x + 2 = 0$
b) $18x^3 - 9x^2 - 2x + 1 = 0$
c) $(x - 2)^3 - 2(x + 1)^3 + 10 = 6x - 5x^2$
d) $(x + 1)^3 + 3x^3 = x^2 + 11x - 2$
e) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$
f) $6x^3 - 2 = 13x^2 - 9x$

8.229. Rozwiąż równanie:

a) $2x(5x^2 - 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2x(x + 1)$
b) $2(8x^3 + 1) + 1 = 4x(7x - 1)$
c) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 12 = x^2 - (x + 1)^2$
d) $(x^2 - 2)^2 - (x - 1)^3 = 17 - x(x^2 + 3)$
e) $(8x + 8)(x^2 - x + 1) - x - 6 = 4x^2(x + 2)$
f) $2x^4 - 3x^2(7x - 25) = 5(21x - 10) + x^2$

8.230. Rozwiąż równanie:

a) $2|x - 2| + (x - 2)^2 = 0$
b) $|x + 1| = |2x + 2|^3$
c) $(x - 3)^3 \cdot |x - 3| = 27(x - 3)$
d) $(3x - 1)^3 \cdot |x + 2| + 4(1 - 3x)^2 = 0$
e) $|x^3 - 1| = x^2 + x + 1$
f) $|x^3 - 8| = 5x^2 + 10x + 20$

8.231. Rozwiąż równanie:

a) $8|x - 1| + (x - 1)(x^2 + 4) = 0$
b) $3|x + 2| = (x + 2)(x - 1)(x + 1)$
c) $x^4 + 5 = |5x^3 + x|$
d) $x^4 + 13 - |13x^3 + x| = 0$
e) $x^3 - 7x = 2|2x^2 - 5|$
f) $x^3 + |x^2 - 3x + 2| = (2x - 1)(x + 1) - 1$

8.232. Jednym z rozwiązań równania $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, jest liczba $1 + \sqrt{3}$. Oblicz a i b.

Zadania prowadzące do równań wielomianowych

8.233. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + (a^3 - 1)x^2 + (2a^2 + 4a + 23)x - 15$.

a) Oblicz a.
b) Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki możliwie najniższego stopnia.

8.234. Liczba −2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + 8x^3 + (4a^2 + 8)x^2 + a^4 - a^2$.

a) Oblicz a.
b) Wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$ i podaj krotność wszystkich pierwiastków.

D **8.235.** Wykaż, że jeśli suma współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + (2a^3 - 6a^2)x^2 + 9a - 28$ jest równa 0, to wielomian $W(x)$ przyjmuje wartość 0 tylko wtedy, gdy $x = 1$.

8.236. Wielomian $W(x) = x^3 + 4a^2(a - 1)x + 3ax - 4$ jest podzielny przez dwumian $(x - 1)$.

a) Oblicz a.
b) Wyznacz iloraz z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 1)$.

D **8.237.** Wykaż, że istnieją trzy wartości parametru a, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + x^2 + (a^3 - a^2)x + 6a$ przez dwumian $(x + 3)$ jest równa −12.

8.238. Iloczyn kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby o 3 od niej większej jest równy 324. Wyznacz te liczby.

8.239. Iloczyn trzech liczb całkowitych, z których druga jest o 3 większa od pierwszej, a trzecia o 1 mniejsza od drugiej, jest równy −30. Wyznacz te liczby.

8.240. Uczniowie pewnej klasy podzielili się na trzy wieloosobowe grupy. W drugiej grupie jest o 6 osób więcej niż w pierwszej, a w trzeciej grupie jest o 10 osób więcej niż w pierwszej. Iloczyn liczby uczniów grupy drugiej i trzeciej jest o 76 większy od sześcianu liczby uczniów pierwszej grupy. Ilu uczniów liczy ta klasa?

8.241. Cyfra dziesiątek pewnej naturalnej liczby trzycyfrowej jest dwa razy większa od cyfry setek, a cyfra jedności tej liczby jest o 1 mniejsza od cyfry setek. Wyznacz tę liczbę trzycyfrową wiedząc, że różnica sześcianu cyfry setek i iloczynu pozostałych cyfr jest równa 4.

8.242. Suma objętości trzech sześcianów jest równa 73 cm^3. Krawędź drugiego sześcianu jest o 2 cm dłuższa od krawędzi pierwszego sześcianu, a krawędź trzeciego sześcianu jest o 1 cm krótsza od krawędzi pierwszego sześcianu. Oblicz długości krawędzi tych sześcianów.

8.243. Śmietana pakowana jest w prostopadłościenne pudełka o pojemności 0,4 l. Podstawa pudełka jest kwadratem. Wysokość pudełka jest o 6 cm krótsza od krawędzi podstawy. Wyznacz wymiary pudełka.

8.244. Z prostokątnego kawałka blachy o wymiarach 0,5 m × 0,4 m należy wyciąć we wszystkich rogach jednakowe kwadraty tak, żeby po zgięciu odpowiednich krawędzi otrzymać otwarty, prostopadłościenny pojemnik. Jakiej wymiary powinny mieć wycięte kwadraty, aby objętość pojemnika była równa 6 litrów?

8.245. Akwarium ma kształt prostopadłościanu. Krawędzie jednego akwarium wychodzące z wierzchołka przy podstawie mają długość 3 m, 5 m, 2 m. Krawędzie drugiego akwarium są odpowiednio dłuższe o stały odcinek od krawędzi pierwszego akwarium. Wyznacz wymiary większego akwarium wiedząc, że jego pojemność jest o 110 m^3 większa od pojemności pierwszego akwarium.

8.246. Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest równy 192. Jakie to liczby?

8.247. Iloczyn trzech kolejnych liczb nieparzystych jest o 65 większy od różnicy kwadratów największej i najmniejszej z nich. Znajdź te liczby.

Równania wielomianowe z parametrem

8.248. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(2x-3)(3x-4a)(x+5)=0$ ma dwa rozwiązania.

8.249. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(x+3)(mx^2+2x+m)=0$ ma dwa rozwiązania.

8.250. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(x+3)(4x^2+3px+5p-4)=0$ ma jedno rozwiązanie.

8.251. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(x-3)\left[x^2-(4k+2)x+(k+2)^2\right]=0$ ma dwa rozwiązania.

8.252. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(2x+3)\left[(3+a)x^2+(a+1)x-2\right]=0$ ma trzy rozwiązania.

8.253. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(x^2-mx+4)(x^2+4x-4m)=0$ nie ma rozwiązań.

8.254. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(x^2-x-2)\left[x^2+(m-3)x+1\right]=0$ ma cztery rozwiązania.

8.255. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których równanie $(k+2)x^3=x(2x-k-3)$ ma trzy rozwiązania.

8.256. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $x^4+(m+2)x^2+m^2-4=0$ ma jedno rozwiązanie.

8.257. Wyznacz wartość parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla której równanie $x^3-(p+3)x^2-4x=0$ ma trzy rozwiązania, z których jedno jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

8.258. Wyznacz wartość parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla którego równanie $x^3-6x^2+(8a-5)x+10a=0$ ma trzy rozwiązania, z których jedno jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

8.259. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których równanie $x^3-2(p+1)x^2+(2p^2+3p+1)x=0$ ma trzy rozwiązania, z których dwa są dodatnie.

8.260. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których równanie $x^3+(2k-3)x^2+(2k+5)x=0$ ma trzy rozwiązania, z których dwa są ujemne.

8.261. Wyznacz wartość parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla którego równanie $x^4+(a+2)x^2+a^2-9=0$ ma trzy rozwiązania.

8.262. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których równanie $x^4+(p-3)x^2+p^2-p-6=0$ ma dwa rozwiązania.

8.263. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^4 + 2(k-5)x^2 + 4k^2 = 0$ ma cztery rozwiązania.

8.264. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^4 + (2-m)x^2 - 2m + 1 = 0$ jest sprzeczne.

8.265. Wyznacz wartość parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla którego równanie $x^4 + (m+1)x^2 + (m+3)^2 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2 i spełniają one warunek: $|x_1 \cdot x_2| > 1$.

D **8.266.** Wykaż, że dla dowolnej rzeczywistej wartości parametru m, równanie $x^3 + m^2(x-2) = 2(x^2 - x + 2)$ ma tylko jedno rozwiązanie.

8.267. Wyznacz wartość parametru p, $p \in \mathbb{R}$, dla którego równanie $x^3 + 2px^2 + 4px + 8 = 0$ ma dwa rozwiązania.

8.268. Dane jest równanie $x^3 - px^2 + px - 1 = 0$ z parametrem p, $p \in \mathbb{R}$. Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru p.

8.269. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $(x^3 + 6x - 7)\left[mx^2 + (m-3)x + 1\right] = 0$ ze względu na wartość parametru m, $m \in \mathbb{R}$. Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji g, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

Funkcje wielomianowe

8.270. Funkcja wielomianowa $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, ma trzy miejsca zerowe: -2, 1 i 4, a dla argumentu -1 przyjmuje wartość -10.

a) Wyznacz współczynniki a, b, c, d.

b) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje tę samą wartość, co funkcja kwadratowa $y = x^2 + x - 2$.

8.271. Wielomian $W(x)$ jest trzeciego stopnia i ma dwa pierwiastki: -3 i 1, przy czym liczba 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Funkcja $y = W(x)$ dla argumentu -4 przyjmuje wartość -50.

a) Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.

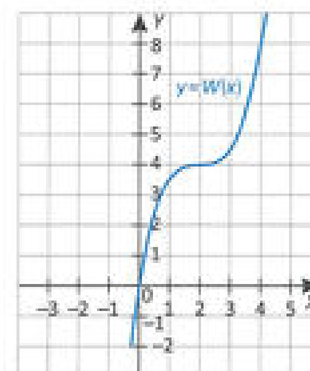
b) Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcje $y = W(x)$ oraz $y = 8|x+3|$ przyjmują tę samą wartość.

8.272. Wielomian $W(x)$ czwartego stopnia ma dwa pierwiastki: 2 i $\frac{1}{2}$, przy czym liczba 2 jest pierwiastkiem trzykrotnym. Funkcja $y = W(x)$ dla argumentu 3 przyjmuje wartość 15.

a) Napisz wzór funkcji wielomianowej w postaci uporządkowanej.

b) Podaj miejsca zerowe funkcji, określonej wzorem $y = W(x+4)$.

8.273. Wykres funkcji $y = ax^3$, gdzie $a \neq 0$, przesunięto równolegle o wektor $[2, 4]$ i otrzymano wykres funkcji $y = W(x)$, którego fragment jest przedstawiony na rysunku obok. Wiadomo, że do otrzymanego wykresu należy punkt $(0, 0)$.

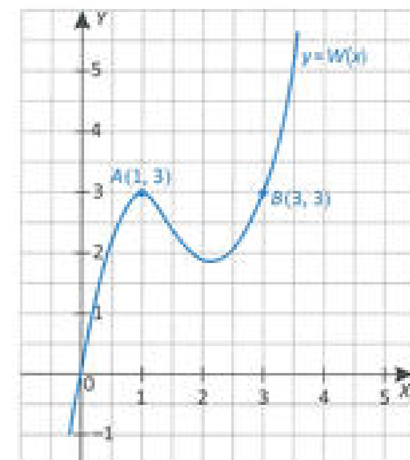


a) Oblicz a.

b) Napisz wzór funkcji $y = W(x)$ w postaci uporządkowanej.

c) Naszkicuj wykres funkcji $y = W(|x|)$.

8.274. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, do którego należą punkty: $A(1, 3)$, $B(3, 3)$ oraz punkt $(0, 0)$. Wiadomo, że st. $W(x) = 3$ oraz współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest równy 1.



a) Napisz wzór funkcji wielomianowej w postaci uporządkowanej.

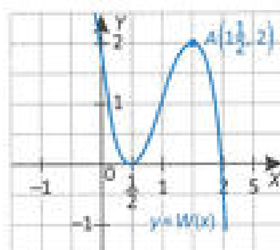
b) Oblicz współrzędne punktów wspólnych wykresu tej funkcji i prostej o równaniu $4x - y - 9 = 0$.

8.275. Wykres funkcji $y = \frac{1}{4}x^4$ przesunięto równolegle o wektor $[-1, -4]$ i otrzymano wykres funkcji $y = W(x)$.

a) Napisz wzór funkcji $y = W(x)$ w postaci iloczynowej.

b) Podaj miejsca zerowe tej funkcji.

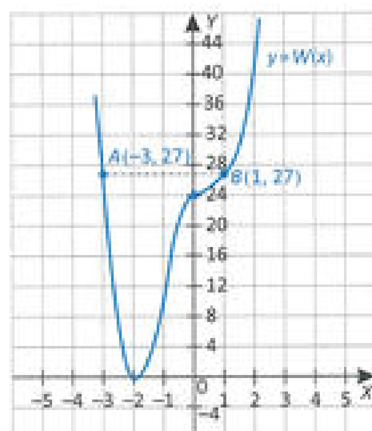
8.276. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, która ma dwa miejsca zerowe: $\frac{1}{2}$ oraz 2. Do wykresu tej funkcji należy punkt $A\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$ oraz st. $W(x) = 3$.



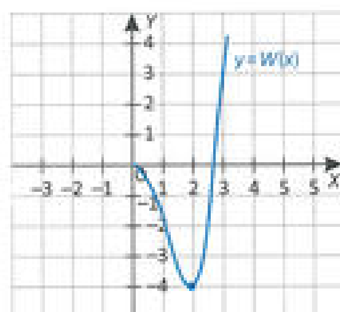
a) Napisz wzór funkcji $y = W(x)$ w postaci uporządkowanej.

b) Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = 4x^2 - 8x + 3$.

8.277. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, której jedynym miejscem zerowym jest liczba -2. Do wykresu tej funkcji należą punkty: $A(-3, 27)$, $B(1, 27)$ oraz $(0, 24)$. Wiedząc, że st. $W(x) = 4$, napisz wzór funkcji w postaci uporządkowanej.



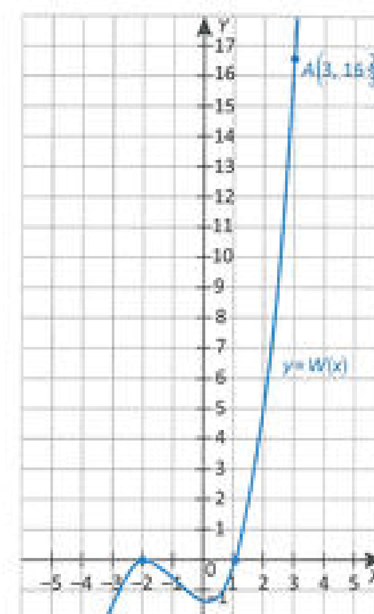
8.278. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, do którego należą punkty $(2, -4)$ i $(0, 0)$. Funkcja ta jest parzysta, a jednym z jej miejsc zerowych jest liczba $2\sqrt{2}$. Uzupełnij jej wykres dla $x < 0$. Wiedząc, że st. $W(x) = 4$:



a) napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej,

b) rozwiąż równanie $W(x) = -3$.

8.279. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, do którego należy punkt $A\left(3, 16\frac{2}{3}\right)$. Funkcja ma dwa miejsca zerowe: -2 i 1 oraz st. $W(x) = 3$.

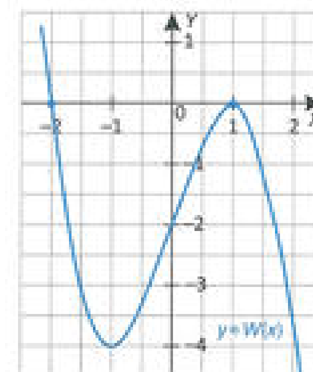


a) Odczytaj z wykresu zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.

b) Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.

c) Dla jakich argumentów funkcja W oraz funkcja liniowa $y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}$ przyjmują tę samą wartość?

8.280. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st. $W(x) = 3$. Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe -2 i 1, a dla argumentu -3 przyjmuje wartość 16.

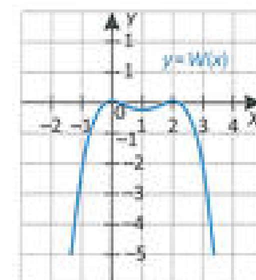


a) Napisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

b) Podaj zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

c) Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji $y = W(x)$ i wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$.

8.281. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st. $W(x) = 4$. Funkcja W ma dwa miejsca zerowe: 0 i 2, a dla argumentu -2 przyjmuje wartość -16.



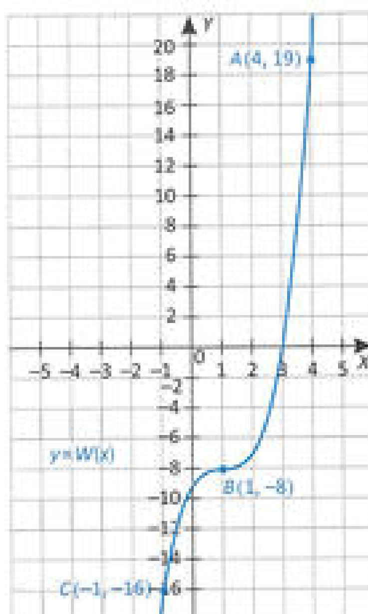
a) Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.

b) Wyznacz wzór funkcji G, której wykres otrzymamy przesuwając równolegle wykres funkcji W o wektor $[-1, 9]$. Zapisz ten wzór w postaci iloczynowej.

8.282. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, do którego należą punkty $A(4, 19)$, $B(1, -8)$ oraz $C(-1, -16)$. Funkcja ma jedno miejsce zerowe, równe 3 oraz st. $W(x) = 3$.

a) Napisz wzór tej funkcji.

D b) Wykaż, że przekształcając ten wykres przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych, otrzymamy wykres funkcji $G(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$.



Nierówności wielomianowe

8.283. Rozwiąż nierówność:

a) $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$
b) $(2x-4)(5-x)(x-2)(x^2+1) \le 0$
c) $(x+3)(x-2)^3(x-1)^2 < 0$
d) $(1-x)^5(x+2)^2(x^2-4)(x^3-1) \ge 0$
e) $x^3(4-x)(x+2)^2 \ge 0$
f) $x^2(-2-x)^3(x-3)^2 < 0$

8.284. Rozwiąż nierówność:

a) $(4x^2+4x+1)(2x^2-5x-3)(3-x) < 0$
b) $(3x-x^2)^2(-2-2x-x^2)(x-3) \le 0$
c) $(27-x^3)(x-2)^4(5-x)^3 > 0$
d) $(x^2-x-6)^2(x^2-6x+9)(x^2+4) > 0$
e) $(2-x)(x^3-7x+6) < 0$
f) $(4-x)(x^3-13x-12) \ge 0$

8.285. Rozwiąż nierówność:

a) $x^4 + 8x^3 \ge -12x^2$
b) $x^3 - 3x^2 \le 9 - 3x$
c) $2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 \le 0$
d) $3x^3 - 45 + 5x^2 \ge 27x$
e) $4x^3 + 8x^2 \le 11x - 3$
f) $2x^3 - 9x^2 \ge 5 - 12x$

8.286. Rozwiąż nierówność:

a) $x^3 - x^2 < 14x - 24$
b) $x^2(x-9) > 15(1-2x) + 7x$
c) $2x^3 - 32x \le 3x^2 - 48$
d) $18x - 5x^2 \ge 2x^3 - 45$
e) $27(x+1) \le 4x^3$
f) $4x^3 - 7x + 3 > 0$

8.287. Rozwiąż nierówność:

a) $4x + 3 \le 2x^3 + x^2$
b) $3x^3 + 20 \le 7x^2 + 8x$
c) $21x^2 + x^4 + 9x^3 > 30 + x$
d) $9x^3 + 3x^2 \le 5x - 1$
e) $(x^2-1)^2 - 6(x^2-1) + 5 \ge 0$
f) $(x^2-5)^2 - 4(x^2-5) - 5 < 0$

8.288. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{9x^4 + 12x^3 + 4x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{x^4 - 8x^2}$
c) $f(x) = \sqrt{4 + 6x - 2x^3}$
d) $f(x) = \sqrt{-2x^3 + 9x^2 - 12x + 4}$

8.289. Rozwiąż nierówność:

a) $9|x|^3 - |x| \le 0$
b) $|x+1|^3 - 3|x+1|^2 < 0$
c) $|x^3 - 3x - 2| \le x^3 - 3x - 2$
d) $|x^3 - 4x| > x^3 - 4x$
e) $|(x^2-9)(x^2-25)| > 0$
f) $|(x^2-1)(x^2-4)| \le 0$

8.290. Rozwiąż nierówność:

a) $|x-2|^3 - 9|x-2| \ge 0$
b) $|x+1|^3 < 25|x+1|$
c) $|x^3 + 3x + 2| > 2$
d) $|x^3 + 6x^2 - 16x - 48| < 48$
e) $|x^3 + 8| \le 3x^2 - 6x + 12$
f) $|x^3 - 125| > 2x^2 + 10x + 50$

8.291. Rozwiąż nierówność:

a) $3x^2 \le |x^3 - 4x|$
b) $x^2 \le |6x - x^3|$
c) $x^4 - 3x^2 \le |x^2 - 3|$
d) $|x^3 + 2x^2| < 9x + 18$
e) $|x^3 - 2x^2| \ge 3x^2$
f) $|x^2 - 1| \ge x^3 - x$

D **8.292.** Wykaż, że $2(x^4 - x^2 - 2y) + y^2 + 6 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}$.

D **8.293.** Wykaż, że $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 10x + 26 > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.

D **8.294.** Wykaż, że jeśli $x \in (-\infty, -2)$, to $x^3 + 8 > (2x^2 + x + 15)(x + 2)$.

D **8.295.** Wykaż, że jeśli $a \le 0$ i $b \le 0$, to $8a^3 + 27b^3 \le 6ab(2a + 3b)$.

D 8.296. Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste x i y są ujemne, to
$27x^3 + 8y^3 < \left[4x^2 - 1 - 2y(4x - y)\right] \cdot (2y + 3x)$.

D 8.297. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest zależność:
$x^8 + 3x^6 + x^2 + 3 \geq 2x^5 + 6x^3$.

D 8.298. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest zależność:
$x^4 + 2x^3 - 6x + 9 \geq 5x^2$.

Test sprawdzający do rozdziału 8.

1. Wyrażenie $(-1 - 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$ jest równe:

A. $1 + 8x^3$ B. $-8x^3 - 1$ C. $8x^3 - 1$ D. $1 - 8x^3$

2. Wielomian $W(x) = x^3 + a^2x^2 + 4ax + 5$ dla $x = -1$ przyjmuje wartość 0. Wobec tego:

A. $a = -2$ B. $a = -1$ C. $a = 1$ D. $a = 2$

3. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (3x^2 - 2x^3 + 1)^7$ jest równa:

A. -2 B. 2 C. $= 128$ D. -128

4. Jeśli $P(x) = x + 3$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, to wielomian $W(x) = P(x) \cdot (x^2 - x - 6)$ ma trzy pierwiastki:

A. $-3, -1, 6$ B. $-3, -2, 3$ C. $-6, -3, 1$ D. $-3, 2, 3$

5. Jeśli wielomiany $W(x) = (x - a)(2x^2 + 3)$ oraz $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + b$ są równe, to:

A. $a + b = -1$ B. $a + b = 0$ C. $a + b = 2$ D. $a + b = 4$

6. Sześcian liczby $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ jest równy:

A. 6 B. $\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^2$

C. $6 + \sqrt[3]{16}$ D. $6\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$

7. Jeśli $P(x) = (-x - 3)^3$ oraz $Q(x) = (x^2 - 3x + 9)(x + 3) + 9x^2$, to stopień wielomianu $P(x) + Q(x)$ jest równy:

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

8. Wielomian $W(x) = x^5 - 3x^3 - 8$ jest podzielny przez dwumian:

A. $x - 8$ B. $x + 2$ C. $x - 2$ D. $x + 4$

9. Wielomian $W(x) = (2x - 1)(3 - x)(2x + 1)$ nie jest podzielny przez wielomian:

A. $3 + 5x - 2x^2$ B. $1 - 4x^2$ C. $-2x^2 + 7x - 3$ D. $4x^2 - 4x + 1$

10. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2(x^2 - 3x + 1)^2 - (5 - 2x)^2$ przez dwumian $x + 1$ jest równa:

A. 1 B. -7 C. 6 D. -5

11. Ilorazem z podzielenia wielomianu $2x^3 - 3x^2 - 4$ przez dwumian $x - 2$ jest wielomian:

A. $2x^2 + x - 2$ B. $2x^2 + x + 2$ C. $2x^2 + 2$ D. $2x^2 - x + 2$

12. Wyrażenie $5x^5 - 5x^2$ po rozłożeniu na czynniki przyjmuje postać:

A. $5(x^2 \cdot x^3 - x \cdot x)$ B. $5x \cdot (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

C. $x^2 \cdot (x - 1)(5x^2 + 5x + 5)$ D. $5 \cdot x^2(x - 1)(x + 1)^2$

13. Liczba pierwiastków wielomianu $(3x^2 - 4)(2x^2 + x + 1)(8x^3 + 125)$ jest równa:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 7

14. Iloczyn rozwiązań równania $2x(x - 4) = (x - 4)(x^2 - 3)$ wynosi:

A. 0 B. -3 C. 12 D. -12

15. Które z podanych równań jest sprzeczne?

A. $(x - 3)^3 = 5 \cdot (x - 3)^3$ B. $x^4 + 3 = -4x^2$

C. $(2x - 1)^4 - 1 = 0$ D. $(x^3 - 1)^3 = -27$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

16. Dane są wielomiany $W(x) = (x^2 + 2x + 4)(2 - x)$ oraz $G(x) = (x - 1)^3$. Zapisz wielomian $F(x) = W(x)\cdot(x - 4) - (1 - x)\cdot G(x)$ w postaci uporządkowanej. Ile pierwiastków ma wielomian $F(x)$?

17. Sprawdź, czy istnieją liczby a i b, dla których wielomiany $W(x) = x^3 + a^2x^2 - 3x + a$ oraz $F(x) = x^3 + 4x^2 + (a + b)x + b - 1$ są równe.

18. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{1}{2\sqrt[3]{5}-1}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}+9}$

19. Wielomian $W(x)$ rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia. Następnie podaj jego pierwiastki.

a) $W(x) = -x^5 + 25x^3 + x^2 - 25$ b) $W(x) = x^4 - 31x^2 + 30x$

20. Wielomian $W(x) = a(x^2 - 1)(x + 3)$, gdzie $a \neq 0$, dla liczby 3 przyjmuje wartość 96.

a) Oblicz a.

b) Wyznacz pierwiastki wielomianu $F(x) = W(x) - 10(x + 1)$.

21. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + (a^3 - 2)x^2 + 2a^2x - a + 5$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 6. Oblicz a.

22. Wielomian $W(x) = 2x^3 + (b - a)x^2 - (3a - b)x + a + 2b$ jest podzielny przez dwumian $x - 3$, natomiast reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 12.

a) Oblicz a i b.

b) Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu $W(x)$.

23. Rozwiąż równanie:

a) $(2x - 5)^3 - 8 = 0$ b) $4x^4 + 35x^2 - 9 = 0$

c) $x^4 + 3x^3 - 2x - 6 = 0$ d) $3x^3 - 10x^2 + 9x = 2$.

24. W trzycyfrowej liczbie nieparzystej podzielnej przez 5, cyfra dziesiątek jest o 2 mniejsza od cyfry setek. Wyznacz tę liczbę wiedząc, że sześcian cyfry dziesiątek jest o 12 mniejszy od iloczynu pozostałych cyfr.

25. Wielomian $W(x)$ jest trzeciego stopnia i ma trzy całkowite pierwiastki, z których jeden jest równy –2, a drugi 4. Reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 1$ jest równa –10. Wiedząc, że suma wszystkich współczynników tego wielomianu wynosi 0, wyznacz wzór wielomianu $W(x)$:

a) w postaci iloczynu dwumianów stopnia pierwszego,

b) w postaci uporządkowanej malejąco.

D **26.** Wykaż, że wielomian $W(x) = (2x^{10} + 3x)^{15} + 1$ jest podzielny przez dwumian $(x + 1)$ i nie jest podzielny przez dwumian $(x - 1)$.

D **27.** Wykaż, że jeśli $x - y = 5$ oraz $x \cdot y = 1$, to $x^3 - y^3 = 140$.

D **28.** Wykaż, że liczba:

a) $5^{18} - 7^{12}$ jest podzielna przez 19

b) $5^{51} - 3^{17}$ jest podzielna przez 61.

D **29.** Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej nieparzystej x liczba $3x^3 + 9x^2 - x - 3$ jest podzielna przez 4.

D **30.** Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 4 jest podzielna przez 4.

D **31.** Wykaż, że $a^4 \le \frac{1+4a^8}{4}$.

D **32.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a różnej od zera, wartość wyrażenia $(a - 1)^2(a + 1)^2 - a(1 - 2a)^3 - 12a^3 - a$ jest ujemna.

D **33.** Wykaż, że $(x + 3)^3 - (x - 1)^3 \ge 16$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

34. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$.

a) Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 3x + 1$.

b) Zapisz wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego.

35. Wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - ax + 2$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 3x + b$. Oblicz a i b.

36. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ jest równa $R(x) = x^2 + 5x + 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $F(x) = (x - 1)(x + 3)$.

37. Wyznacz wymierne pierwiastki wielomianu:

a) $W(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ b) $W(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 + x - \frac{3}{8}$.

38. Wielomian $W(x) = x^3 + (m+1)x^2 + (m-3)x - 3$, gdzie $m \in \mathbf{Z}$, ma trzy całkowite pierwiastki. Oblicz m.

D **39.** Wykaż, że wielomian $W(x) = 16x^4 - 16x^3 + 4x - 1$ ma trzykrotny pierwiastek.

40. Rozwiąż nierówność:

a) $(3-x)^3(x^3 - 3x^2 + 2x - 6) < 0$ b) $|x^3 - 21x + 10| \geq 10$.

41. Wielomian $W(x)$ jest trzeciego stopnia i ma dwa pierwiastki: -1 oraz 1, przy czym 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wykres funkcji wielomianowej $y = W(x)$ przecina oś OY w punkcie o rzędnej 2.

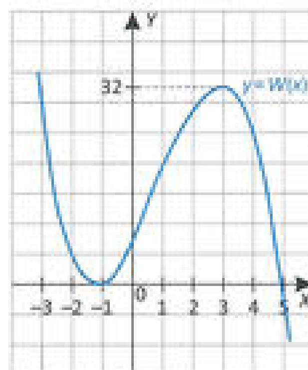
a) Napisz wzór funkcji $y = W(x)$ w postaci uporządkowanej.

b) Rozwiąż nierówność $W(x) \geq 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3$.

42. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie st. $W(x) = 3$. Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe: 5 oraz -1, a dla argumentu 3 przyjmuje wartość 32.

a) Napisz wzór tej funkcji w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego.

b) Wyznacz argumenty, dla których funkcja $y = W(x)$ przyjmuje wartości mniejsze, niż funkcja $f(x) = -x^2 + 13x + 5$.



43. Wielomian $W(x) = -x^3 + px^2 + qx - 24$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3, które spełniają zależność: $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = -14$. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ jest równa -40.

a) Wyznacz p i q.

b) Oblicz wartość wyrażenia $x_1 x_2 x_3 - 5(x_1 + x_2 + x_3)$.

D **44.** Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + 7x + 15$, gdzie $a \in \mathbf{Z}$. Wykaż, że jeśli wielomian $W(x)$ ma pierwiastek będący liczbą pierwszą, to suma wszystkich jego pierwiastków też jest liczbą pierwszą.

D **45.** Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej p przez 3 jest równa 2. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby 2^p przez 7 jest równa 4.

D **46.** Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej k, liczba $k^3 - 6k^2 + 11k - 6$ jest podzielna przez 6.

D **47.** Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{37\sqrt{10} + 117} - \sqrt[3]{37\sqrt{10} - 117}$ jest naturalna.

48. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $x^4 + (m-1)x^2 + m^2 + 4m - 5 = 0$ ma tylko dwa rozwiązania.

49. Dany jest wielomian $W(x) = (x-2)(x^2 - 2mx + 1 - m^2)$ z parametrem m, gdzie $m \in \mathbf{R}$.

a) Dla $m = 1$ rozwiąż nierówność $W(x) \geq |4 - x^2|$.

b) Wyznacz wszystkie wartości m, dla których wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki.

50. Ustal liczbę rozwiązań równania $(x+3)(mx^2 + 2mx - 3) = 0$ z niewiadomą x ze względu na wartość parametru m, $m \in \mathbf{R}$.

Odpowiedzi do zadań

1. Przekształcenia wykresów funkcji

Wektor w układzie współrzędnych – podstawowe informacje

1.2. $\vec{u}=[3,0]$, $\vec{v}=[-4,0]$, $\vec{r}=[0,5]$, $\vec{p}=[0,-4]$, $\vec{k}=[4,2]$, $\vec{l}=[-4,3]$, $\vec{m}=[-4,-2]$, $\vec{s}=[3,-5]$

1.3. a) $\overrightarrow{AB}=[6,-3]$ b) $\overrightarrow{AB}=\left[2,3\sqrt{3}\right]$ c) $\overrightarrow{AB}=\left[\frac{1}{2},2\frac{2}{3}\right]$ d) $\overrightarrow{AB}=\left[9\frac{1}{2},-14\right]$

1.4. $\overrightarrow{AB}=[3,-1]$, $\overrightarrow{CA}=[2,-8]$, $\overrightarrow{BC}=[-5,9]$, $\overrightarrow{BA}=[-3,1]$, $\overrightarrow{AC}=[-2,8]$, $\overrightarrow{CB}=[5,-9]$

1.5. a) 13 b) $7\frac{1}{2}$ c) 61 d) 3

1.6. a) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$ b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5}$ c) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=25$ d) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{3\sqrt{13}}{4}$

1.7. a) $B(-3,9)$ b) $B(-1,13)$ c) $B(4,-9)$ d) $B\left(4\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

1.8. a) $A(-5,7)$ b) $A(5,-11)$ c) $A\left(\frac{1}{4},4\frac{1}{6}\right)$ d) $A\left(-\sqrt{3},-5\right)$

1.9. wektory równe: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CE}$; pary wektorów przeciwnych: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE}$ i $\overrightarrow{AD}$ oraz $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{CD}$

1.10. a) $P(1,4)$ b) $P\left(-1\frac{1}{2},2\frac{1}{2}\right)$

1.11. a) $S(-2,1)$ b) $S(1,1)$ c) $S(-1,8)$ d) $S\left(-3\frac{1}{2},-3\frac{1}{2}\right)$

1.12. a) $B(4,-1)$ b) $B(12,-4)$ c) $B(0,-2)$ d) $B(-8,-3)$

1.13. a) $A(-7,5)$ b) $A(4,6)$

1.14. Wektory $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{BD}$ są przeciwne; *wskazówka:* wykaż, że trójkąty ACB i CDB są przystające.

1.15. a) $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{ED}$

1.16. $|AB|=\sqrt{82}$; $|AC|=5\sqrt{2}$; $|BC|=4\sqrt{2}$; trójkąt jest prostokątny

1.17. a) $\sqrt{58}+\sqrt{5}+\sqrt{37}$ b) $\frac{\sqrt{89}}{2}$

1.18. a) tak; $8\sqrt{5}$ b) nie; $12\sqrt{2}+2\sqrt{17}$

1.19. a) $D(-2,2)$ b) $S(-0{,}5;2)$ c) $|AC|=\sqrt{61}$, $|BD|=3$

1.20. $C(2,2)$, $D(0,7)$, $|AB|=|CD|=\sqrt{29}$, $|BC|=|AD|=5$

1.21. $B(3,-4)$, $|AB|=10$

1.22. a) $m=1$, $n=-2$ b) $m=-3\frac{5}{8}$, $n=2\frac{1}{4}$ c) $m=2$, $n=-2$ d) $m=0$, $n=-6$

1.23. $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$

1.24. a) $\overrightarrow{FD}=2\vec{a}+\vec{b}$ b) $\overrightarrow{AD}=2\vec{b}+2\vec{a}$ c) $\overrightarrow{DB}=-2\vec{b}-\vec{a}$

1.25. a) $[5,3]$ b) $[4,-3]$ c) $[10,6]$ d) $[-10,-6]$ e) $[-2{,}5;-1{,}5]$

1.29. a) $[-4,-2]$ b) $\left[5,-22\frac{1}{2}\right]$ c) $[0,0]$ d) $[-14,-37]$

1.30. $D(9,-7)$

1.31. $k=3$, $l=-4$

1.32. a) $\vec{x}=[-2,3]$ b) $\vec{x}=[3,-15]$ c) $\vec{x}=\left[6\frac{1}{2},-4\frac{1}{2}\right]$ d) $\vec{x}=\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$, e) $\vec{x}=[19,3]$

Przesunięcie równoległe. Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OX*

1.33. a) $A_1(1,2)$ b) $A_1(3,5)$ c) $A_1(5,10)$

1.34. a) $B(6,2)$ b) $B(10,-3)$ c) $B(1,-5)$

1.35 a) $h(x)=f(x-3)$

x	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	0	1	2	0	1	2

b) $h(x)=f(x+2)$

x	−4	−3	−2	−1	0	1
$h(x)$	0	1	2	0	1	2

1.36. a)

x	7	8	9	10	11
$g(x)$	−10	−5	0	5	10

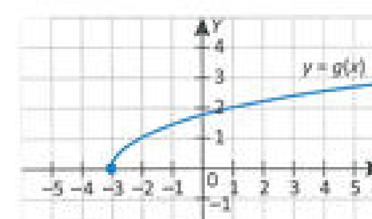
1.37. a) o 4 jednostki w prawo; $\vec{u}=[4,0]$ b) o 6 jednostek w lewo; $\vec{u}=[-6,0]$ c) o 5 jednostek w lewo; $\vec{u}=[-5,0]$ d) o 10 jednostek w prawo; $\vec{u}=[10,0]$

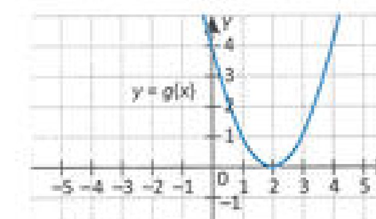
1.38. $D_f=\langle -6,3\rangle$ $D_g=\langle -2,7\rangle$ $D_h=\langle -7,2\rangle$

1.39. miejsca zerowe: funkcji f: −3 oraz 2; funkcji g: −6 oraz −1; funkcji h: −1 oraz 4

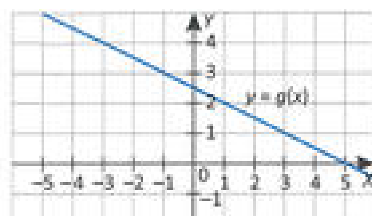
1.40. a) 2 b) −6

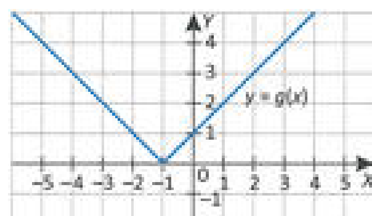
1.41. a) $g(x)=\sqrt{x+3}$, $\vec{u}=[-3,0]$ b) $g(x)=(x-2)^2$, $\vec{u}=[2,0]$



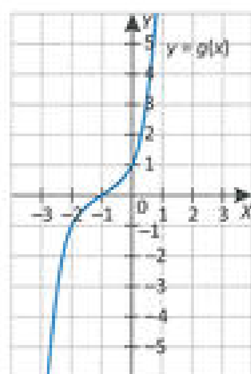


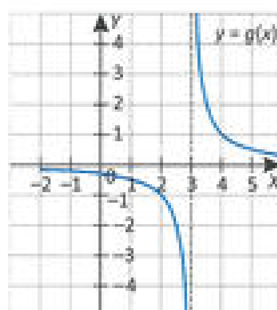
c) $g(x) = -\frac{1}{2}(x-5) = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$, $\vec{u} = [5, 0]$ d) $g(x) = |x+1|$, $\vec{u} = [-1, 0]$





e) $g(x) = (x+1)^3$, $\vec{u} = [-1, 0]$ f) $g(x) = \frac{1}{x-3}$, $\vec{u} = [3, 0]$





1.42. a) $\vec{u} = [5, 0]$ b) $\vec{u} = [-10, 0]$ c) $\vec{u} = [3, 0]$ d) $\vec{u} = [-8, 0]$ e) $\vec{u} = [1, 0]$ f) $\vec{u} = [4, 0]$
1.43. a) $g(1) = 4$ b) funkcja g jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$
1.44. a) $D = \langle -2, +\infty)$ b) -2
1.45. a) $D_g = R - \{1\}$ b) $(0, -1)$ c) $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$
1.46. a) $g(x) = (x+2)^3$
1.47. a) $D_g = (-1, 7\rangle$ b) funkcja g jest malejąca w przedziale $(-1, 4\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 4, 7\rangle$
1.48. d) $D_g = \langle -2017, -2002\rangle$
1.49. miejsca zerowe: $-12, -8, -2$; zbiór wartości: $\langle -3, 5)$
1.50. c) $(5, 10)$, $(10, 11)$, $(11, 5)$
1.51. a) $g(x) = x^2 - 10x + 26$ b) $g(x) = 2x + 5$
c) $f(x) = x^2 - x - 2$ d) $g(x) = (x-3)(x-9)$

Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OY*

1.53. a) $h(x) = f(x) + 2$ b) $h(x) = f(x) - 7$

x	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	6	5	4	2	3	4

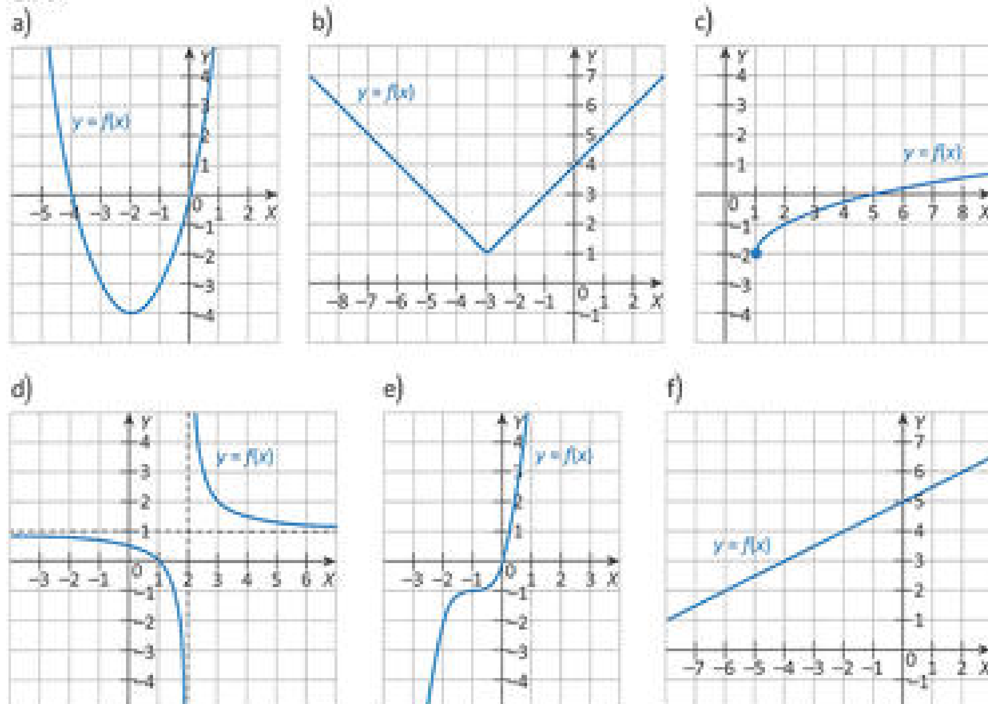
x	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-3	-4	-5	-7	-6	-5

1.55. a) $\vec{u} = [0, 1]$ b) $\vec{u} = [0, -2]$ c) $\vec{u} = [0, -6]$ d) $\vec{u} = [0, 3]$
1.56. a) o 4 jednostki do dołu; $\vec{u} = [0, -4]$ b) o 2 jednostki do góry; $\vec{u} = [0, 2]$
c) o 8 jednostek do góry; $\vec{u} = [0, 8]$ d) o 3 jednostki do dołu; $\vec{u} = [0, -3]$
1.57. -45
1.58. 8
1.59. dla funkcji f: $(0, 2)$; miejsce zerowe: 3 dla funkcji g: $(0, 4)$; brak miejsc zerowych
dla funkcji h: $(0, -3)$; brak miejsc zerowych
1.60. a) $g(x) = -2x + 6$, $\vec{u} = [0, 5]$ b) $g(x) = \sqrt{x} - 3$, $\vec{u} = [0, -3]$
c) $g(x) = 3x^2 - 7$, $\vec{u} = [0, -7]$ d) $g(x) = |x| + 4$, $\vec{u} = [0, 4]$
e) $g(x) = \frac{4}{x} - 2$, $\vec{u} = [0, -2]$ f) $g(x) = \frac{1}{5}x^3 + 3$, $\vec{u} = [0, 3]$
1.62. a) $-0{,}5$ b) $ZW_g = R - \{2\}$ c) funkcja jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
1.63. a) -1, 1 b) $ZW_g = \langle -1, +\infty)$ c) $(-\infty, 0\rangle$
1.64. a) 4 b) 6 c) $\langle 3, 5)$
1.65. a) $g(x) = |x| - 4$ c) najmniejsza wartość funkcji f: 0; najmniejsza wartość funkcji g: -4
1.66. a) $D_g = \langle -1, 2)$, $ZW_g = \langle -2, 7)$ b) $(0, -1)$
1.67. a) $\langle -16, -6)$ d) $\langle 2341, 2351)$
1.68. c) $(-3, -9)$, $(2, -9)$
1.69. c) $g(x) = x^2 + 2x + 3$
1.70. a) $\vec{v} = [0, 6]$ b) nie
1.71. $\vec{v} = [-4, 0]$
1.72. a)

x	-3	-2	1	6	13	41	101
$g(x)$	-5	-3	0	6	7	30	405

1.73. a) $\vec{u} = [2, 4]$ b) $\vec{u} = [-1, 5]$ c) $\vec{u} = [-5, -3]$ d) $\vec{u} = [7, -2]$ e) $\vec{u} = [\sqrt{3}, 10]$
f) $\vec{u} = [-4, -\sqrt{2}]$
1.74. a) $g(x) = \sqrt{x-1} + 2$ b) $g(x) = (x+2)^2 + 3$ c) $g(x) = |x-4| - 5$ d) $g(x) = \frac{1}{x-1} - 3$
1.75. a) $\vec{u} = [1, 8]$ b) $\vec{u} = [-20, -4]$ c) $\vec{u} = [-3, -1]$ d) $\vec{u} = [1, 4]$ e) $\vec{u} = [-2, 6]$
f) $\vec{u} = [5, -7]$

1.76.



1.77. a) funkcja g jest rosnąca w przedziałach: $\langle -9, -5\rangle$, $\langle -2, 3\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle -5, -2\rangle$ b) dla $x = -5$ funkcja g przyjmuje wartość największą, równą 7; dla $x = -2$ funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą, równą 1 c) 24

1.78. a) $D_g = (-\infty, -2\rangle, ZW_g = (-2, 3\rangle$ b) $D_g = \langle 5, 15\rangle, ZW_g = \langle -9, -1)$ c) $D_g = R - \{-1\}$, $ZW_g = (-7, +\infty)$ d) $D_g = (-5, 4), ZW_g = (-\infty, 10\rangle$

1.79. a) $g(x) = x^2 + 7x + 10$ b) $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1} + 1$ c) $g(x) = -3x^2 - 6x + 4$
d) $g(x) = 2x^2 + 8x + 13$

Symetria osiowa. Symetria osiowa względem osi *OX* i *OY*

1.81. 1) a) dwie b) trzy c) jedną d) cztery e) pięć f) nieskończenie wiele

1.83. a) $D_g = (-6, 5\rangle, ZW_g = \langle -2, 4\rangle$ b) $D_g = (-7, 4), ZW_g = (-3, 3\rangle$
c) $D_g = \langle -3, 6\rangle, ZW_g = \langle -4, 0\rangle$ d) $D_g = \langle -5, 5\rangle, ZW_g = \langle -4, -1) \cup \langle 2, 5\rangle$

1.84. a) $g(x) = -3x + 2$ b) $g(x) = 5x - 8$ c) $g(x) = -x^3 - 8$ d) $g(x) = x^2 - 1$
e) $g(x) = -|x| + 15$ f) $g(x) = -\sqrt{x} - 7$

1.85. a) $g(x) = 4$ b) $g(x) = -x + 3$ c) $g(x) = -x^2$ d) $g(x) = -x^3$ e) $g(x) = -\sqrt{x+2}$
f) $g(x) = -x^2 + 1$

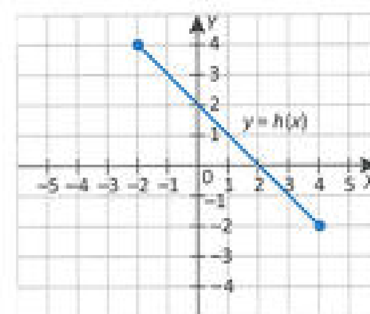
1.86. a) $D_g = \langle -4, 3), ZW_g = \langle -5, 1)$ b) $D_g = R - \{3\}, ZW_f = (-\infty, 4\rangle$

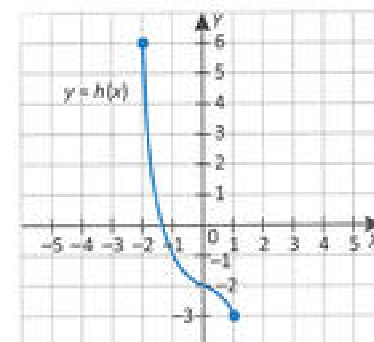
1.87. a)

x	−7	−2	−1	3	4	6	10
$g(x)$	13	5	2	0	−1	−4	−5

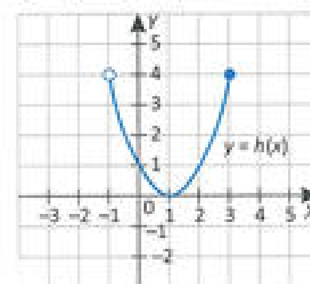
1.88. a) $D_g = \langle -4, 3), ZW_g = \langle -2, 4)$ b) $D_g = \langle -3, -1\rangle \cup (0, 5\rangle, ZW_g = \langle -2, 5\rangle$
c) $D_g = \langle -4, 3\rangle, ZW_g = \langle 0, 4\rangle$ d) $D_g = (-3, 6\rangle, ZW_g = \langle -3, 4)$

1.89. a) $h(x) = -x + 2$, gdzie $x \in \langle -2, 4\rangle$ d) $h(x) = -x^3 - 2$, gdzie $x \in \langle -2, 1\rangle$





f) $h(x) = (1-x)^2$, gdzie $x \in (-1, 3\rangle$

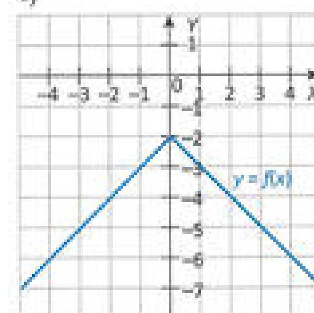


1.90. a) $g(x) = -5x - 4, D_g = R$ b) $g(x) = \sqrt{-x} + 2, D_g = (-\infty, 0\rangle$ c) $g(x) = |3 - x|, D_g = R$
d) $g(x) = \dfrac{1}{6-x}, D_g = R - \{6\}$ e) $g(x) = \sqrt{-x-4}, D_g = (-\infty, -4\rangle$
f) $g(x) = \dfrac{-2x}{1+x}, D_g = R - \{-1\}$

1.91. a) $D_g = (-3, 4\rangle, ZW_g = (-1, 5\rangle$ b) $D_g = R - \{-3\}, ZW_g = \langle -4, +\infty)$

1.92.

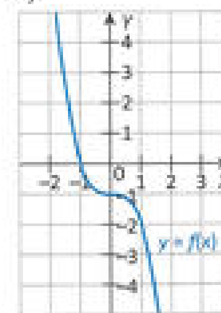
a)



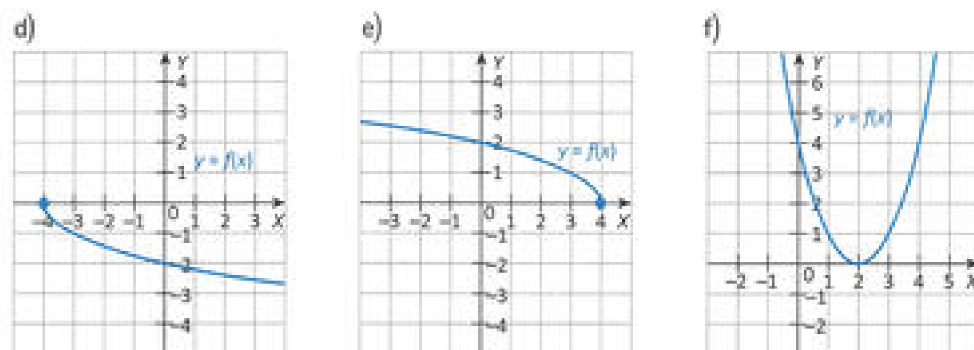
b)



c)



d) e) f)



1.93. a) $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, 4)$, $h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -6, -4)$ b) g rosnąca w przedziałach: $\langle -5, 0\rangle$, $\langle 2, 6\rangle$; h rosnąca w przedziałach: $\langle -6, -2\rangle$, $\langle 0, 5\rangle$

1.94. a) $-6, -1, 5$; $(0, 4)$ b) $-5, 1, 6$; $(0, -4)$ c) $-8, -2, 3$; $(0, 2)$

1.96. a) $y = \frac{x-3}{2x}$ b) $y = -\frac{x+3}{2x}$

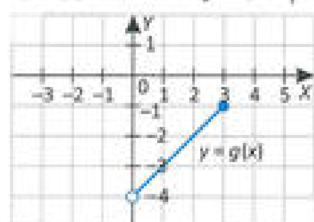
Symetria środkowa. Symetria środkowa względem punktu (0, 0)

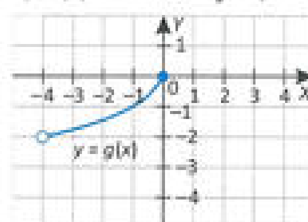
1.99. a)

x	−45	−30	−11	−8	0	3	4
$g(x)$	−80	−31	−5	−2	6	8	20

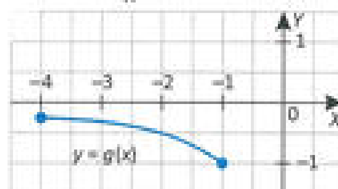
1.100. a) $D_g = \langle -5, 2\rangle$, $ZW_g = \{-2\}$ b) $D_g = (-5, 4\rangle$, $ZW_g = (-5, -1\rangle$
c) $D_g = (-3, 4\rangle$, $ZW_g = \langle -2, 3\rangle$ d) $D_g = \langle -5, 5)$, $ZW_g = (-3, -1) \cup \langle 1, 3\rangle$

1.101. a) $g(x) = x - 4$; $D_g = (0, 3\rangle$ b) $g(x) = -\sqrt{-x}$; $D_g = (-4, 0\rangle$





d) $g(x) = \frac{1}{x}$; $D_g = \langle -4, -1\rangle$



1.102. a) $ZW_g = \langle -4, 2\rangle$ b) -4 c) 12 d) $\langle -5, -3\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$

1.103. a) $D_g = (-7, 3\rangle$, $ZW_g = \langle -4, 0)$ b) $D_g = (-5, 1)$, $ZW_g = \langle -2, 6\rangle$
c) $D_g = \langle -9, +\infty)$, $ZW_g = \mathbf{R} - \{8\}$ d) $D_g = (-\sqrt{2}, 4\rangle$, $ZW_g = (-\infty, 1\rangle$

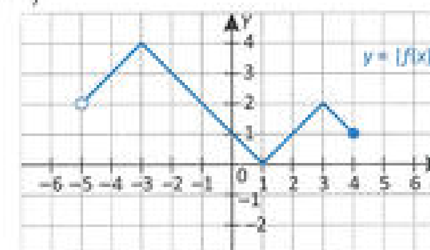
1.104. a) $g(x) = -4x - 7$; $\frac{-7}{4}$; $(0, -7)$ e) $g(x) = 1 - \sqrt{-x}$; -1, $(0, 1)$
f) $g(x) = 3(x + 2)(1 - x)$; -2, 1; $(0, 6)$

Wykres funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$

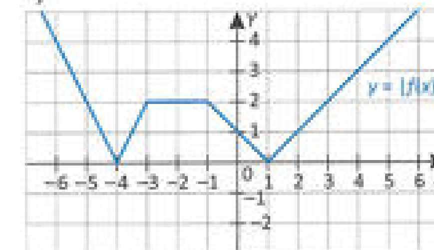
1.105.

x	−3	−1	0	1	3	4	5
$y = g(x)$	5	7	2	4	1	2	8

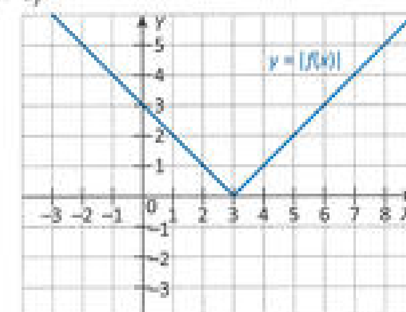
1.106. a)



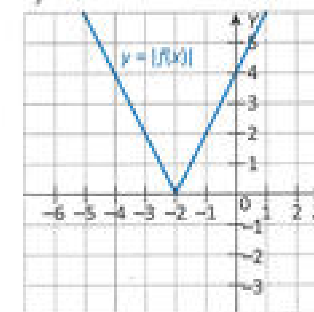
b)



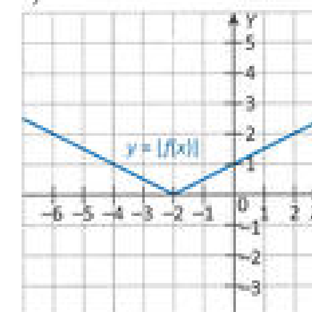
1.107. a)



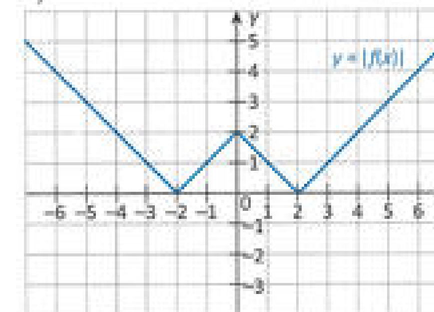
b)



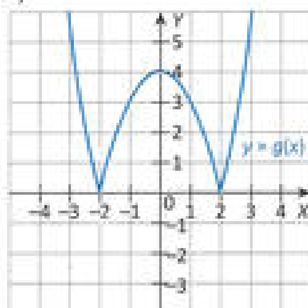
c)



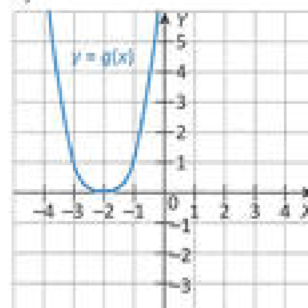
d)



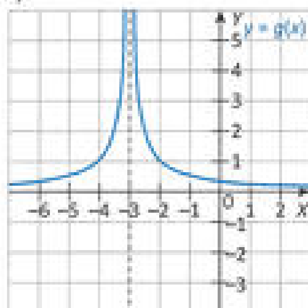
1.108. a)



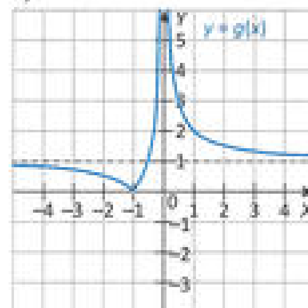
b)



c)



d)



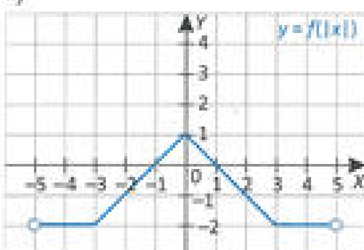
1.109. a)

x	−30	−25	−12	12	25	30
$y = f(\|x\|)$	6	−12	−8	−8	−12	6

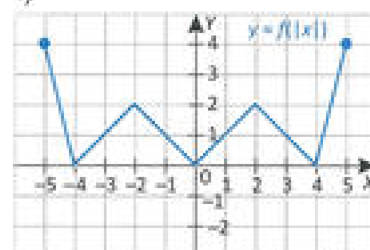
b)

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(\|x\|)$	−12	−10	−8	−6	−4	−2	0	−2	−4	−6	−8	−10	−12

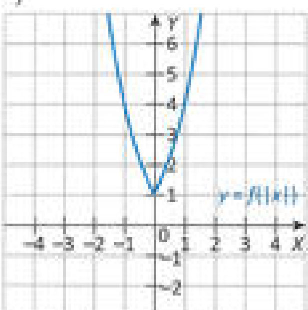
1.110. a)



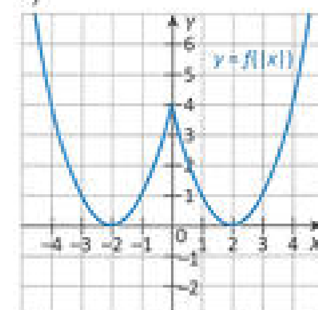
b)



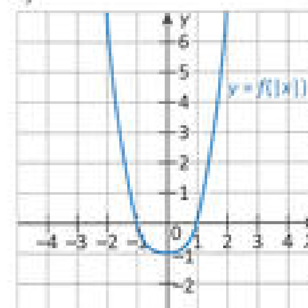
1.111. a)



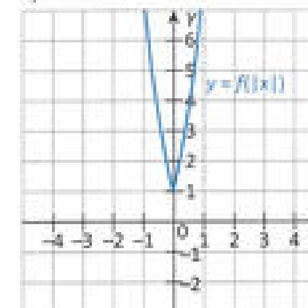
b)



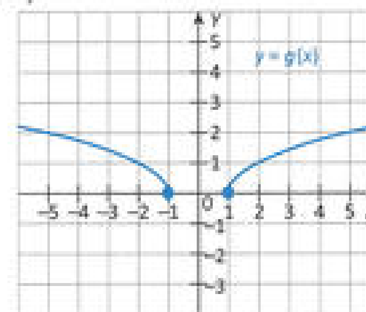
c)



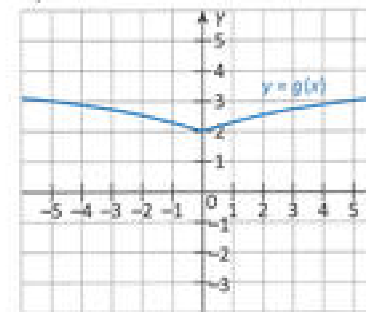
d)



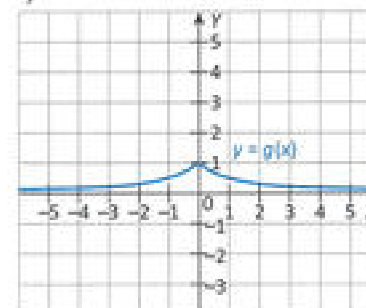
1.112. a)



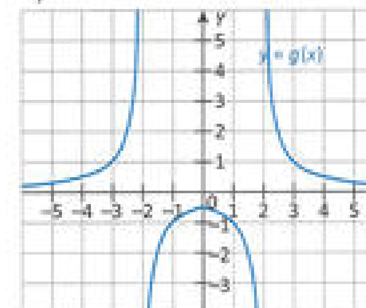
b)



c)



d)



1.113. a) $x \in \langle 0, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

1.116. a) $\langle 0, 5\rangle$ b) $\langle 0, 9)$ c) $(1, 10\rangle$ d) $(1, 15)$

1.117. a) $\langle -4, 4\rangle$ b) $(-7, 0) \cup (0, 7)$ c) $\langle -5, -2) \cup (2, 5\rangle$ d) $(-\infty, -2\rangle \cup \{-1, 1\} \cup \langle 2, +\infty)$

1.118. a) −28, −2, 2, 28 b) −7, 2, 28

1.119. a) $(0, \sqrt{3})$ b) $(0, -\sqrt{3})$

Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ oraz $y = f(k \cdot x)$, gdzie $k \neq 0$

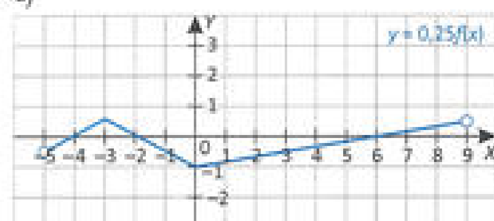
1.121. a) $A_1(0, 0)$, $B_1(3, -9)$, $C_1(6, 9)$ b) $A_1(0, 0)$, $B_1(3, -1)$, $C_1(6, 1)$
c) $A_1(0, 0)$, $B_1(3, 2)$, $C_1(6, -2)$

1.122.

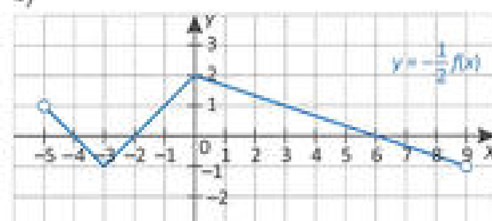
x	−11	−8	−5	−2	1	4	7
$y = 5f(x)$	10	−15	20	−25	30	−35	0

1.123.

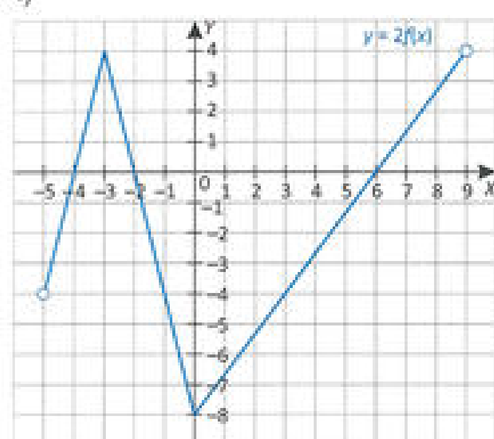
a)



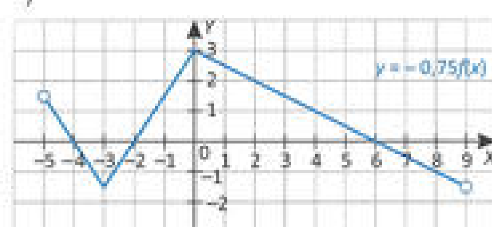
b)



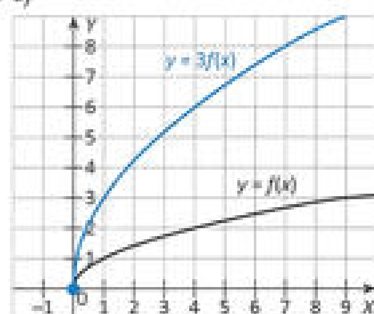
c)



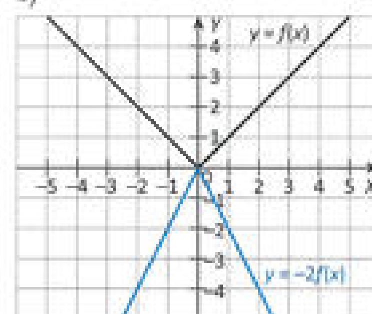
d)



1.124. a)



b)



1.125. a) $A_1(-8, 0)$, $B_1(2, -2)$, $C_1(6, 2)$ b) $A_1(12, 0)$, $B_1(-3, -2)$, $C_1(-9, 2)$

c) $A_1(10, 0)$, $B_1\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$, $C_1\left(-\frac{15}{2}, 2\right)$

1.126. a)

x	−5	−4	0	16	20
y	2	−5	1	−3	7

b)

x	−15	−12	0	3	3,75
y	7	−3	1	−5	2

c)

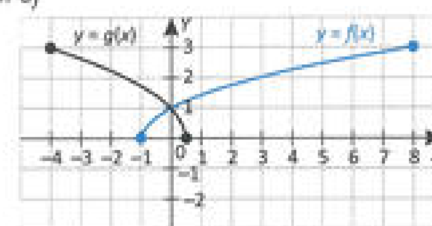
x	37,5	−30	0	120	150
y	2	−5	1	−3	7

d)

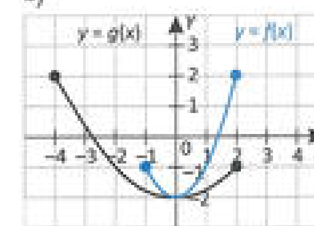
x	−240	−192	0	48	60
y	7	−3	1	−5	2

1.127. a) $D_g = \left\langle -\frac{3}{2}, 1 \right\rangle$ b) $D_g = \langle 0, 4\rangle$ c) $D_g = (-2, 1)$ d) $D_g = (-4, 2)$

1.128. a)

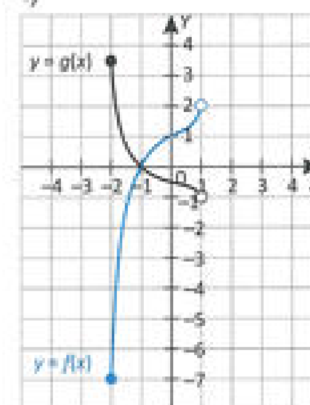


b)

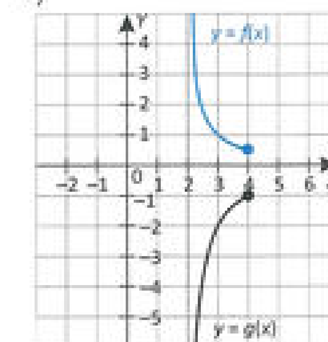


$g(x)=\sqrt{-2x+1}$, $D_g = \left\langle -4, \frac{1}{2}\right\rangle$, $ZW_g = \langle 0, 3\rangle$ $g(x)=\frac{1}{4}x^2-2$, $D_g = \langle -4, 2\rangle$, $ZW_g = \langle -2, 2\rangle$

c)

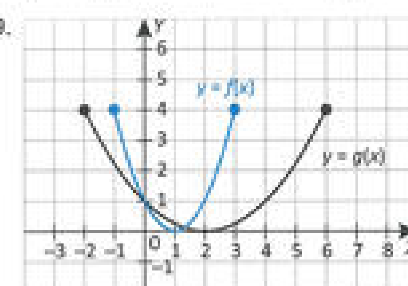


d)



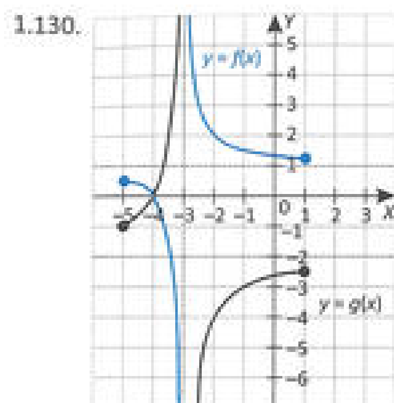
$g(x)=\frac{-1}{2}x^3-\frac{1}{2}$, $D_g = \langle -2, 1)$, $ZW_g = \left(-1, 3\frac{1}{2}\right\rangle$ $g(x)=\frac{2}{2-x}$, $D_g = (2, 4\rangle$, $ZW_g = (-\infty, -1\rangle$

1.129.



a) $g(x)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$, $x \in \langle -2, 6\rangle$ b) $\langle -2, 2\rangle$

1.130.



a) $g(x)=\frac{-2}{x+3}-2$, $D_g=\langle -5,-3)\cup(-3,1\rangle$ b) $ZW_g=\left(-\infty,-2\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle -1,+\infty)$

1.131. *wskazówka:* a) $y=2\cdot f(x)$ b) $y=g(4x)$ c) $y=h(x+1)$

1.132. *wskazówka:* a) $y=f(2x)$ b) $y=-2g(x)$ c) $y=h(|x|)$

1.133. $D_g=\langle -32, 96\rangle$; miejsca zerowe funkcji g: −24 oraz 32

1.134. $D_g=\langle -8, 5\rangle$, $ZW_g=\left(-6\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$, $(0, -4)$

1.135. $D_g=\left(-1, \frac{1}{3}\right\rangle$, $ZW_g=\langle -9, 4)$ miejsca zerowe funkcji g: $-\frac{2}{3}$, 0, $\frac{1}{6}$

1.136. $D_g=(-5, 10)$, $ZW_g=\langle -80, 48\rangle$, $(0, -8)$

Szkicowanie wykresów wybranych funkcji

1.137. a) $g_1(x)=(x-3)^2+1$, $g(x)=-(x-3)^2-1$ b) $g_1(x)=-x^2$, $g(x)=-(x-3)^2+1$

1.138. a) $g_1(x)=\sqrt{x+4}-2$, $g(x)=\sqrt{-x+4}-2$ b) $g_1(x)=\sqrt{-x}$, $g(x)=\sqrt{-(x+4)}-2$

1.139. a) nie b) tak

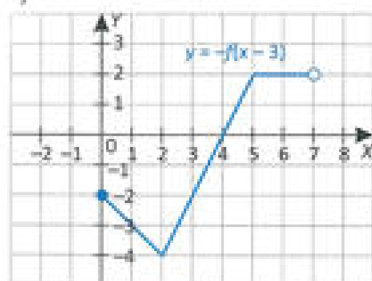
1.140. tak

1.141. a) $y=\left|\frac{1}{x}-3\right|-2$ b) nie

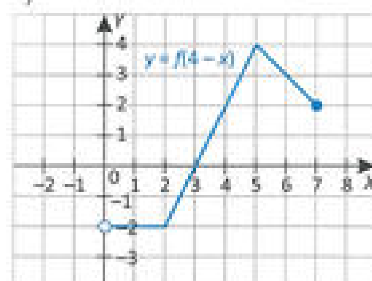
1.142. nie; wówczas otrzymamy wykres funkcji $y=f(|x|-5)$

1.143. nie; wówczas otrzymamy wykres funkcji $y=f(|x-1|)$

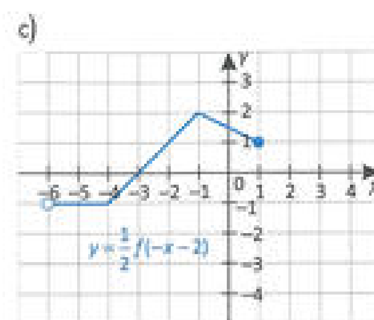
1.144. a)



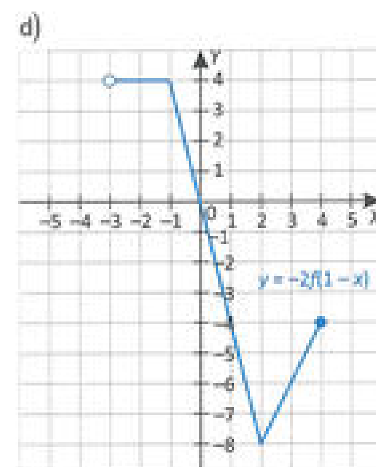
b)



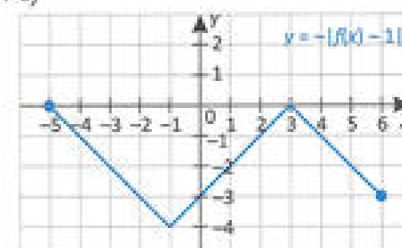
c)



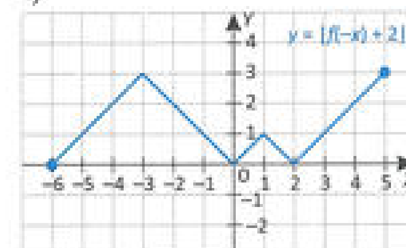
d)



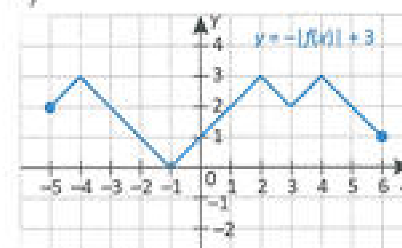
1.145. a)



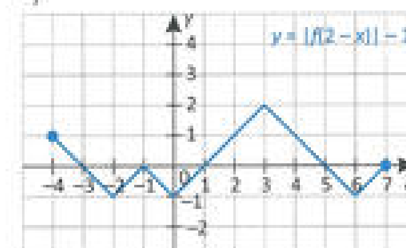
b)



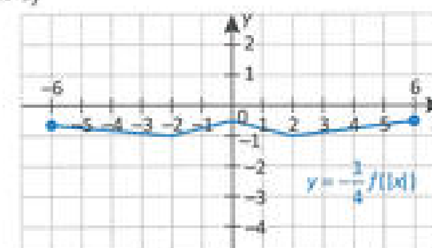
c)



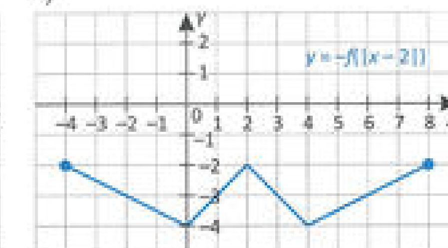
d)



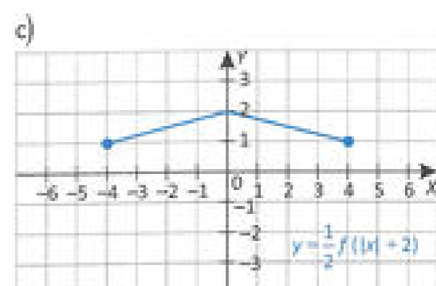
1.146. a)



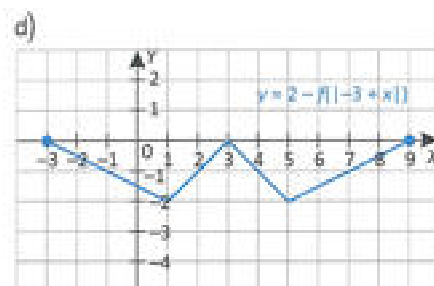
b)



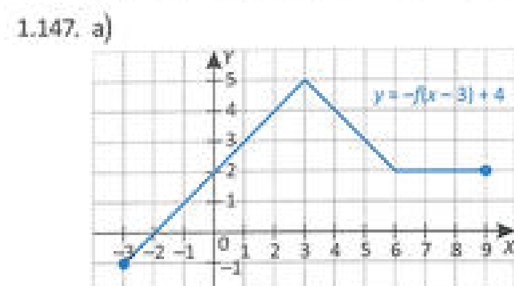
c)



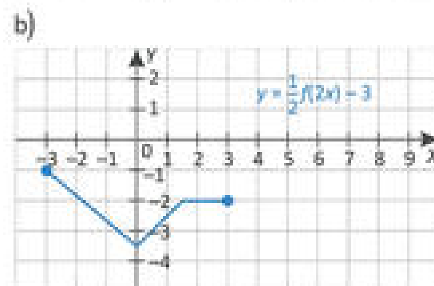
d)



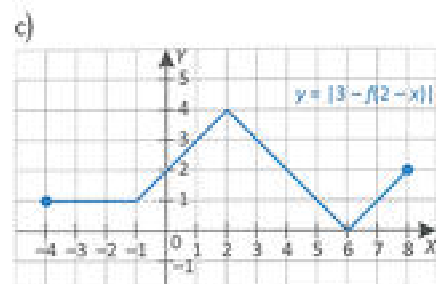
1.147. a)



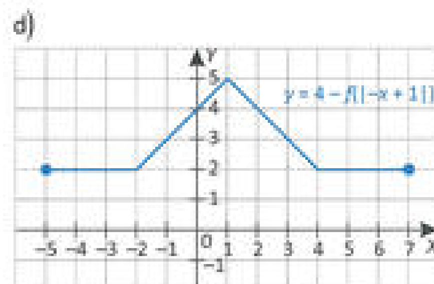
b)



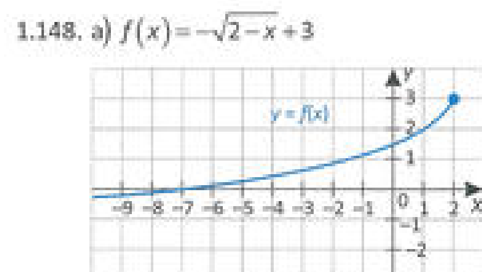
c)



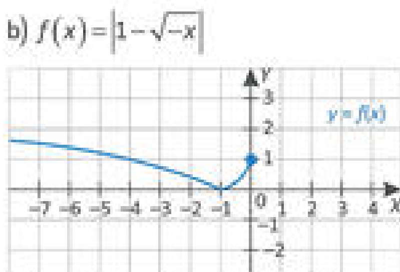
d)



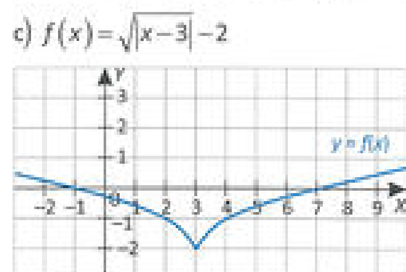
1.148. a) $f(x) = -\sqrt{2-x} + 3$



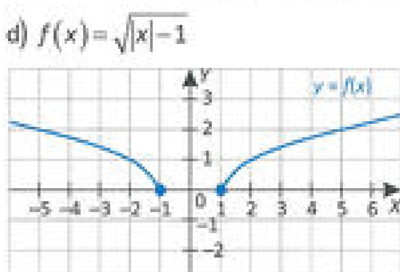
b) $f(x) = \left|1 - \sqrt{-x}\right|$



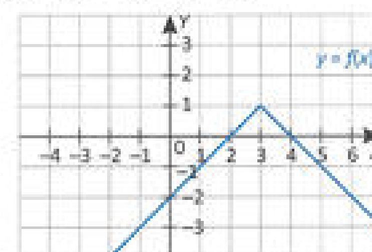
c) $f(x) = \sqrt{|x-3|} - 2$



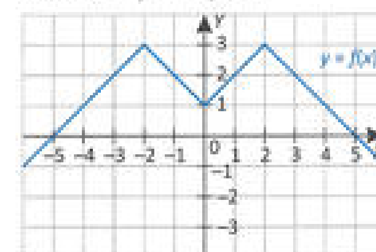
d) $f(x) = \sqrt{|x|} - 1$



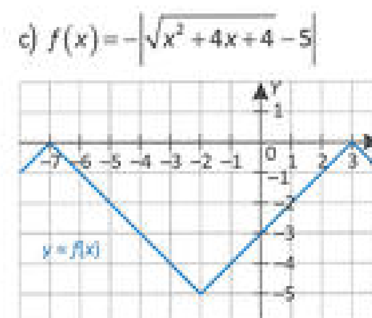
1.149. a) $f(x) = -|x-3| + 1$



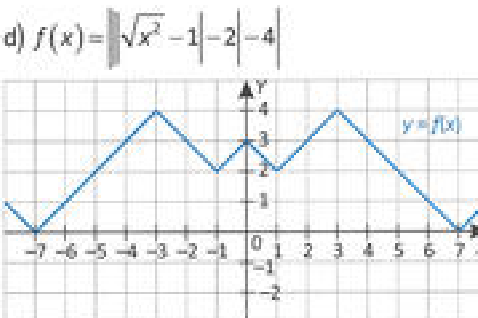
b) $f(x) = -\left||x| - 2\right| + 3$



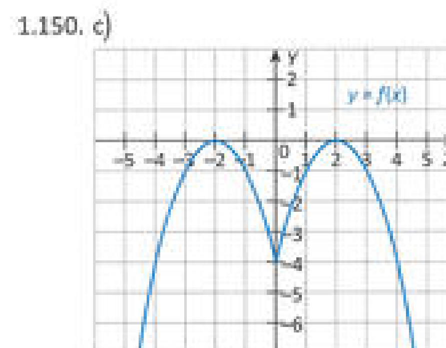
c) $f(x) = -\left|\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 5\right|$



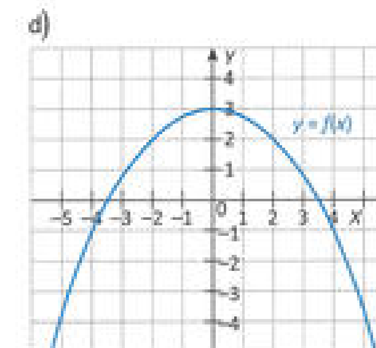
d) $f(x) = \left|\left|\sqrt{x^2} - 1\right| - 2\right| - 4\right|$



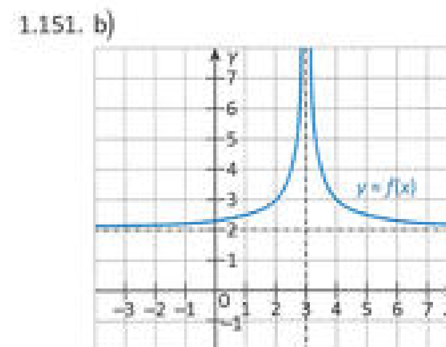
1.150. c)



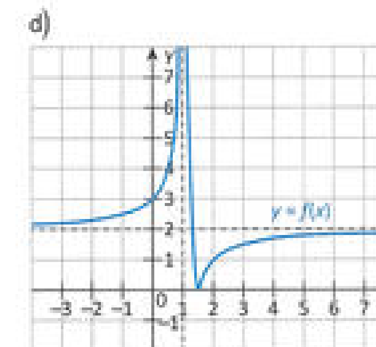
d)



1.151. b)

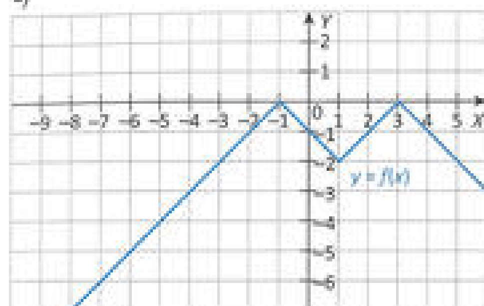


d)

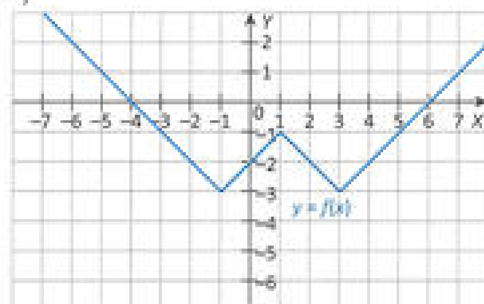


1.152.

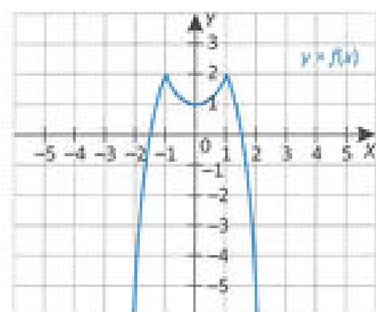
c)



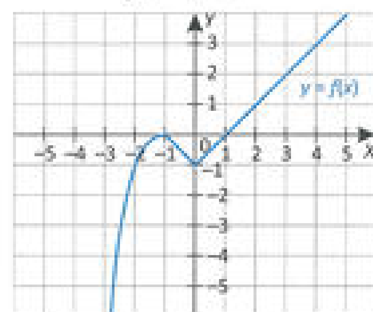
d)



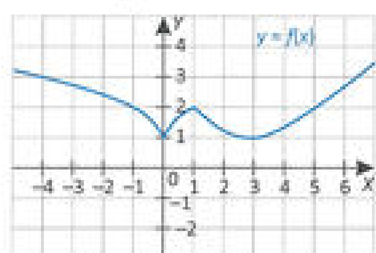
1.153. a) $f(x)=2-\left||x|^3-1\right|$



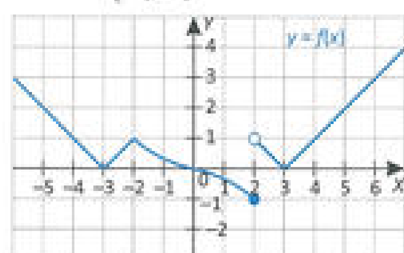
b) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3, & \text{jeśli } x\le -1\\ |x|-1, & \text{jeśli } x>-1\end{cases}$



c) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}+1, & \text{jeśli } x\le 1\\ \frac{1}{4}\cdot(x-3)^2+1, & \text{jeśli } x>1\end{cases}$



d) $f(x)=\begin{cases}\left||x|-3\right|, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ -\left(\frac{1}{2}x\right)^3, & \text{jeśli } x\in\langle -2,2\rangle\end{cases}$



Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności

1.154. $x\in\{-1,-3\}$

1.155. $x=-4$

1.156. $x\in\{1,3\}$

1.157. $x\in\langle 0,+\infty)$ b) $x=4$ c) $x=-4$

1.158. $x\in\{-2,1\}$ b) $x\in\{2,5\}$ c) $x\in\{-1,1\}$

1.159. a) $x=1$ b) $x\in\{-1,1\}$ c) $x=7$

1.160. $(-\infty,-3)\cup(-2,+\infty)$

1.161. $\langle 1,5)$

1.162. $(-\infty,0\rangle\cup\langle 4,+\infty)$

1.163. a) $x=-1$ b) $x\in(-1,0\rangle$

1.164. a) $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ b) $x\in\langle 2,6\rangle$ c) $x\in(-\infty,-1\rangle$

1.165. a) $x\in(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$ b) $x\in\langle -2,-1\rangle$ c) $x\in(-\infty,3)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)$

1.166. a) $x\in\{2,4\}$ b) $x\in(2,4)$

1.167. a) $x\in\{-1,3\}$ b) $x\in(-1,1)\cup(1,3)$

1.168. a) $x\in\{-2,2\}$ b) $x\in(-\infty,-2\rangle\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$

1.169. $x\in\{-3,0,5\}$ b) $x\in\{-4,-1\}$ c) $x\in\{-1,2\}$ d) $x\in\{-4,0,4\}$

1.170. a) $x\in(-\infty,2\rangle$ b) $x\in(-8,-2)\cup(2,8)$ c) $x\in\langle -1,1\rangle$ d) $x=0$

1.171. a) $x\in\langle -1,7\rangle$ b) $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(4,+\infty)$

c) $x\in(-1,3)\cup(4,9)$ d) $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	D	D	B	B	D	A	C	A
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	B	D	B	C	B	C	C	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

16. a) $A(6,-8)$ b) $C(12,-23)$

17. $D(-4,2)$, $|AC|=6\sqrt{2}$

18. $D(-7,11)$

19. *wskazówka:* Wykaż, że $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$

20. a) $g(x)=-x^2-6x+1$ b) $a=9$

21. a) $g(x)=3x-1$ b) $\vec{u}=[0,6]$

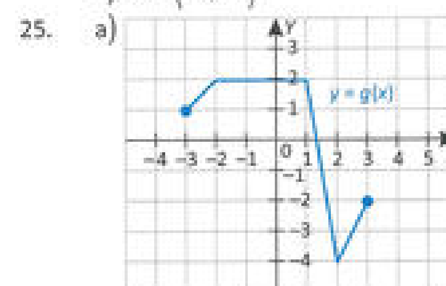
23. a) $g(x)=2x-3$ b) $h(x)=2x+3$ c) $k(x)=-2x-3$

24. a)



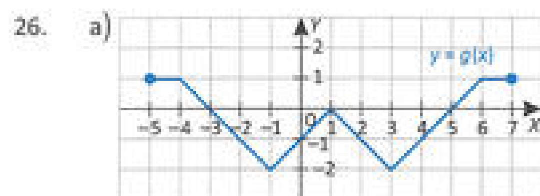
b) $x\in\langle -4,-1\rangle$

25. a)



b) $\langle -3,-2\rangle$, $\langle 2,3\rangle$

26. a)



b) $x \in (-3, 1) \cup (1, 5)$

27. a) $D = \langle -8, 4\rangle$, $ZW = \langle -1, +\infty)$ b) $D = \langle -4, 8\rangle$, $ZW = (-\infty, 1\rangle$
c) $D = \langle -7, 5\rangle$, $ZW = \langle -5, +\infty)$

28. a) $g(x) = \frac{x}{2} - 1$ b) $x \in \langle -2, 0)$

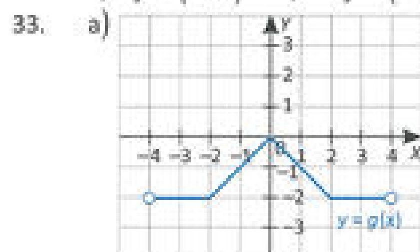
29. a) $x = -4$ b) $x \in \{1, 3\}$ c) $x \in \{-2, 2\}$

30. a) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \{0\}$ b) $x \in (-2, 1)$ c) $x \in \langle -5, -2\rangle \cup \langle -1, +\infty)$

31. b) przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u} = [-7, 0]$, $f_1(x) = \sqrt{x+7}$, a następnie symetria względem osi OY, $h(x) = \sqrt{-x+7}$

32. b) $D_g = \langle -7, 5\rangle$ c) $ZW_g = \langle -2, 4\rangle$ d) 20

33. a)

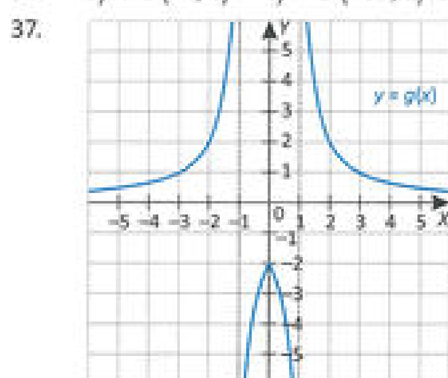


b) $g(x) = -f(|x| + 1) + 1$

35. a) $x \in \{-2, 0, 2\}$ b) $x \in \{-2, 0\}$

36. a) $x \in (-1, 3)$ b) $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 2, +\infty)$

37.



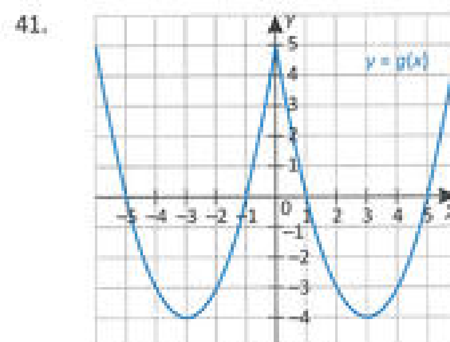
a) $D = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ $ZW = (-\infty, -2\rangle \cup (0, +\infty)$ b) funkcja g jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0\rangle$ funkcja g jest malejąca w każdym z przedziałów: $\langle 0, 1)$, $(1, +\infty)$ d) $x \in \langle -2, -1) \cup (1, 2\rangle$

38. a) $m = -3$ b) $x \in (-4, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 4)$

39. a) $m = 4$ b) równanie ma cztery rozwiązania

40. a) $x \in \{-10, -6, -2, 2\}$ b) $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 4, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -8) \\ \frac{1}{2}x + 4, & \text{jeśli } x \in \langle -8, -4) \\ -\frac{1}{2}x, & \text{jeśli } x \in \langle -4, 0) \\ \frac{1}{2}x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \end{cases}$

41.



a) $ZW = \langle -4, +\infty)$ b) $x = -5 \vee x = -1 \vee x = 1$ $x = 5$
c) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (5, +\infty)$

2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

2.1. a) 4 b) 1 c) −0,7 d) $3 - \sqrt{2}$ e) $\sqrt{5} - 2$ f) 0

2.2. a) 3 b) $4\pi - 7$ c) $1{,}7 - 2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) 0 f) $2\sqrt{3} - 2$

2.3. a) −3 b) $2 - \sqrt{2}$ c) −1,2 d) $-\pi^2$

2.4. a) −11 b) −11 c) 17 d) $345 - 140\sqrt{5}$

2.5. a) 8 b) 1 c) −6 d) $2\frac{1}{4}$

2.6. a) −56 b) −3

2.7. a) 5 b) −1

2.8. a) 110 b) 50

2.9. a) $a - 2$ b) $-3 - a$ c) $3a - 2$ d) $8a - 4$

2.10. a) $2a^2 - 2a$ b) $-5a - 1$ c) $a + 3$ d) $1 - a$

2.11. a) $f(x)=\begin{cases}2x, \text{ jeśli } x<0\\ 0, \text{ jeśli } x\geq 0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}-2x-6, \text{ jeśli } x<-3\\ 2x+6, \text{ jeśli } x\geq -3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}3x, \text{ jeśli } x<1\\ -3x+6, \text{ jeśli } x\geq 1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{3}x, \text{ jeśli } x<3\\ 3-\frac{1}{3}x, \text{ jeśli } x\geq 3\end{cases}$

2.12. a) $f(x)=\begin{cases}-x^2, \text{ jeśli } x<0\\ x^2, \text{ jeśli } x\geq 0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ jeśli } x<0\\ 3, \text{ jeśli } x>0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}0{,}5x+1, \text{ jeśli } x<2\\ 1{,}5x-1, \text{ jeśli } x\geq 2\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}2x+4, \text{ jeśli } x<-4\\ -4, \text{ jeśli } x\geq -4\end{cases}$

2.13. a) 1 b) 6 c) –7 d) 4
2.17. a) –90 b) –23 c) 11 d) 20

Odległość między liczbami na osi liczbowej.
Geometryczna interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej

2.18. a) $c=1$, $d=3$ b) $c=1\frac{1}{2}$, $d=3\frac{1}{2}$ c) $c=-3{,}45$; $d=4{,}95$
d) $c=45\frac{7}{12}$, $d=42\frac{1}{4}$ e) $c=-16\sqrt{7}$, $d=13\sqrt{7}$ f) $c=-2+\sqrt{5}$, $d=7-3\sqrt{5}$
2.19. a) –1 i 5 b) –7 i 3 c) –33 i 19
d) $\sqrt{2}-3$ i $\sqrt{2}+3$ e) $-4-\pi$ i $\pi-2$ f) $-3+2\sqrt{3}$ i 5
2.20. a) $\langle -4, 6\rangle$ b) $(-1, 7)$ c) $(-\infty, -5)\cup\langle 1, +\infty)$
d) $(-\infty, -7)\cup(-3, +\infty)$ e) $(-\infty, 5)\cup\langle 7, +\infty)$ f) $\langle -9, 1)$
2.21 a) 24 b) $31\frac{1}{3}$ c) $2\sqrt{3}-\pi$ d) $6\sqrt{2}+3$ e) 8 f) $3+4\sqrt{3}$
2.22. a) $|x|=8$ b) $|y-5|=1$ c) $|-3-a|=4$ d) $|z-8|<3$
e) $|p+2|>7$ f) $|k+1|\leq 5$ g) $|7-m|\geq 2$
2.23. a) $16-8m$ b) $6m-15$ c) $m+15$ d) m^2+33

Proste równania z wartością bezwzględną

2.24. a) –3, 3 b) 4, –10 c) żadna d) –5
2.25. a) $x\in\left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$ b) równanie sprzeczne c) $x\in\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
d) równanie sprzeczne e) $x=0$ f) $x\in\{-3, 3\}$
2.26. a) $x\in\{-1, 5\}$ b) $x\in\{-5, 3\}$ c) $x=3$
d) $x\in\{-3, -1\}$ e) $x\in\{3, 7\}$ f) $x\in\{-1, 9\}$
2.27. a) $x=-9$ b) $x\in\{-5, 11\}$ c) $x\in\{-11, -21\}$
d) $x\in\{18, 24\}$ e) $x\in\{-8, 6\}$ f) równanie sprzeczne
2.28. a) $|x-11|=0$ b) $|x+19|=0$ c) np. $|x-1|=-1$
d) $|x-0|=8$ e) $|x-2|=5$ f) $|x+2\pi|=5\pi$

2.29. a) $|x|=\sqrt{6}$ b) $|x-2|=\sqrt{3}$ c) $|x+3\sqrt{5}|=0$ d) $|x-11|=6$
e) $|x+2{,}5|=6$ f) $\left|x-1\frac{2}{3}\right|=4$
2.30. a) $x\in\{-1, 3\}$ b) $x=4$ c) $x\in\{-5, 3\}$ d) $x\in\{-5, 1\}$
e) równanie sprzeczne f) $x\in\{-6, -4\}$
2.31. a) $x\in\{-5{,}6; 8\}$ b) $x\in\{2{,}8; 4\}$ c) $x=-2{,}5$ d) równanie sprzeczne
e) $x\in\{-1, 3\}$ f) $x\in\{-13, 7\}$
2.32. a) $x\in\{0, 4\}$ b) $x\in\{-4{,}2; -0{,}6\}$ c) $x\in\{-3{,}24; -2{,}76\}$
d) równanie sprzeczne e) $x\in\{-18{,}3; 24{,}3\}$ f) $x\in\{-10, 8\}$
2.33. a) równanie sprzeczne b) $x\in\{-7+5\sqrt{5}, 7-\sqrt{5}\}$ c) $x\in\{5\sqrt{3}-7, 7-\sqrt{3}\}$
d) $x\in\{-10\sqrt{2}-1, 1\}$ e) $x\in\{2\sqrt{2}-3, 3\}$ f) $x\in\{-6\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+2\}$
2.34. a) $x\in\left\{-3, -1\frac{2}{3}\right\}$ b) $x\in\left\{-4\frac{19}{25}, 5\right\}$ c) $x\in\left\{-3, 7\frac{1}{2}\right\}$
d) $x\in\{-6, 7\}$ e) $x\in\left\{-\frac{3}{4}, 2\right\}$ f) $x\in\left\{-3\frac{3}{5}, 2\frac{4}{5}\right\}$
2.35. a) $x\in\{-2, -6\}$ b) $x\in\{2, 4\}$ c) $x\in\{-5, 3\}$ d) równanie sprzeczne
e) $x=3$ f) $x\in\{-6, 2\}$
2.36. a) $A=\{1, 3\}$, $B=\{-5\}$, $C=\{-5, 3\}$
b) $(B\cup C)\cap A=\{3\}$, $(A-C)\cup B=\{-5, 1\}$, $C-A-B=\varnothing$
2.37. a) $x\in\{-2, 2\}$ b) $x\in\{-8, 2\}$ c) $x\in\{2, 6\}$ d) $x\in\{-6{,}9; -3{,}1\}$
e) $x\in\{-2, 6\}$ f) $x\in\{-8, -6\}$
2.38. a) $x\in\{3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}\}$ b) $x\in\{-12+\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ c) $x\in\{4\sqrt{3}-6, 4\sqrt{3}+6\}$
d) $x\in\{-3\sqrt{2}-2, 3\sqrt{2}-4\}$
2.39. a) jeśli $m=4$, to $x=1$; jeśli $m=8$, to $x=9$ b) $m=-2$; drugie rozwiązanie nie istnieje c) jeśli $m=-11$, to $x=25$; jeśli $m=7$, to $x=-11$ d) $m=-1$ lub $m=1$; $x=2$
2.40. a) np. $|x+3|=0$ b) np. $|x-1|=2$ c) np. $|x-7|=3$ d) np. $|x+5|=3$
e) np. $|x-2|=2$ f) np. $|x+8|=8$

Proste nierówności z wartością bezwzględną

2.41. a) 3, 6, 7 b) –9, 6 c) –2, $3\frac{1}{2}$, 5 d) –2
2.42. a) $x=0$ b) $\mathbb{R}-\{-1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\varnothing$
2.44. a) $x\in(-4, 4)$ b) $x\in(-\infty, -6\rangle\cup\langle 6, +\infty)$ c) $x\in(-\infty, -9)\cup(9, +\infty)$
d) $x\in\langle -2, 2\rangle$ e) $x\in\langle -8, 8\rangle$ f) $x\in(-\infty, -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}, +\infty)$
2.45. a) $x\in(1, 7)$ b) $x\in\langle -3, 1)$ c) $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ d) $x\in\langle -3, 5\rangle$
e) $x\in\langle 2, 4\rangle$ f) $x\in(-\infty, -7)\cup(-3, +\infty)$

2.46. a) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ c) $x \in (-2, 2)$
d) $x \in (0, 8)$ e) $x \in \langle 6, 12\rangle$ f) $x \in (-\infty, -7) \cup (-5, +\infty)$

2.47. a) np. $|x| < 9$ b) np. $|x| > \sqrt{3}$ c) np. $|x-4| < 8$ d) np. $|x+1| \geq 3$
e) np. $|x-6| > 1$ f) np. $|x-5| \leq 5$ g) np. $|x+2| \leq 7$
h) np. $|x-2| < \sqrt{3}$ i) np. $|x-\pi| < 3\pi$

2.48. a) $x \in (-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$ b) $x \in \langle -5, -1\rangle$ c) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -1, +\infty)$

2.49. a) $x \in \langle -9{,}8; 7\rangle$ b) $x \in (-\infty; 1{,}2) \cup (4, +\infty)$ c) $x \in (-\infty; -1{,}5\rangle \cup \langle 1, +\infty)$
d) $x \in (-0{,}5; 3{,}1)$ e) $x = -\frac{10}{3}$ f) $x \in (-1{,}2; 1{,}8)$

2.50. a) $x \in \left(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\right)$ b) $x \in \left(-\infty, -3\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{3}, +\infty\right)$ c) $-\sqrt{5}$
d) nierówność sprzeczna e) $x \in \left(-\infty, \sqrt{2}-2\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ f) $x \in \left(-\sqrt{3}-9, -\sqrt{3}-1\right)$

2.51. a) $x \in \left\langle -37\frac{2}{3}, 29\right\rangle$ b) $x \in \left(-4, 4\frac{1}{3}\right)$ c) $x \in \left(-\infty, -1\frac{4}{5}\right) \cup \left(3\frac{2}{5}, +\infty\right)$
d) $x \in (-\infty, 2) \cup \left\langle 3\frac{2}{3}, +\infty\right)$ e) $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ f) $x \in \left(-\frac{1}{5}, 1\right)$

2.52. a) $x \in R - \left\{\frac{1}{10}\right\}$ b) nierówność sprzeczna c) $x \in (13, 17)$
d) $x \in R$ e) $x = \frac{8}{9}$ f) $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{5}\right) \cup \left(3+\sqrt{5}, +\infty\right)$

2.53. a) $-4, -2$ c) $A \cap B = (-6, -5\rangle \cup \langle -3, 0)$, $B - A = (-\infty, -6\rangle \cup \langle 0, +\infty)$

2.54. a) $A = (-2, 2)$, $B = \langle -3, 1\rangle$ b) 0, 1 d) $A' \cap B' = (-\infty, -3) \cup \langle 2, +\infty)$

2.55. a) 0, 1, 2 b) 3, 4, 5 c) $-2, -1, 0, 1, 2$ d) 0

2.56. a) $x \in (3, 5)$ b) $x \in \left\langle -3, -1\frac{2}{3}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}, 1\right\rangle$

2.57. a) $x \in \langle 0, 4\rangle$ b) $x \in R$ c) $x \in R - \{-5\}$ d) $x \in \left(-\infty, \sqrt{2}-12\right) \cup \left(\sqrt{2}+10, +\infty\right)$
e) nierówność sprzeczna f) $x \in (-\infty, 1) \cup \left\langle 4\sqrt{3}-1, +\infty\right)$

2.58. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ b) $x \in (-\infty; -1{,}6\rangle \cup \langle 5, +\infty)$ c) $x \in (-12, -6)$
d) $x \in (-2, 8)$

2.59. a) $x \in (1, 3) \cup (5, 7)$ b) $x = -5$ c) $x \in \{-1, 3\}$ d) $x \in (-\infty, 6) \cup (10, +\infty)$

Własności wartości bezwzględnej

2.60. a) 0 b) $2|x-3|$ c) -8 d) 3 e) 0 f) $1 - 2|x-1|$

2.61. a) 1 b) 8 c) $3 \cdot |x-3|$ d) 5 e) $|1-2x|$ f) $\frac{1}{15|x+2|}$

2.62. a) 2 b) -4 *wskazówka:* Przedstaw liczbę pod pierwiastkiem jako kwadrat pewnej liczby.

2.63. a) $L = P = 1$ b) $L = P = 2$

2.64. a) $-2\sqrt{-x}$ b) $2x^2$ c) x

2.65. a) 4 b) $9 - b$

2.66. a) $-3x-3$ b) $3x-9$ c) $\frac{1}{3-x}$ d) $\frac{|x-3|}{|x-1|+2}$

2.67. a) $x \in \{0, 4\}$ b) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \left\{-1, -\frac{1}{5}\right\}$
e) $x \in \{-9, -1\}$ f) $x \in \left\{-1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}\right\}$

2.68. a) $x \in \left\{1\frac{2}{3}, 5\right\}$ b) $x \in \{-3, 1\}$ c) $x \in \left\{-4, \frac{2}{3}\right\}$ d) $x \in \left\{-\frac{2}{3}, 10\right\}$
e) $x \in \left\{1, 2\frac{1}{3}\right\}$ f) $x = 3$

2.69. a) $x = 0$ b) $x = 3$ c) równanie sprzeczne d) $x = -2$

2.71. $-1{,}6$

2.74. *wskazówka:* Zauważ, że $y \in \langle -5, -1\rangle \Leftrightarrow |y+3| \leq 2$ oraz $|x+y+2| = |(x-1)+(y+3)|$. Skorzystaj z odpowiedniej własności wartości bezwzględnej.

Równania z wartością bezwzględną

2.78. a) $x \in \{-14, 14\}$ b) $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$ c) $x \in \{-8, -2, 0, 6\}$ d) $x \in \{-5, 11\}$
e) $x \in \{-4, 2, 3, 9\}$ f) $x \in \left\{-2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\right\}$

2.79. a) $x \in \{-10, -2, 2, 10\}$ b) $x \in \{-2, 0, 2\}$ c) $x \in \{2, 4\}$ d) $x \in \{-9, 7\}$
e) równanie sprzeczne f) $x \in \{-6, -3, -2, 1\}$

2.80. a) $x = 1\frac{1}{2}$ b) równanie sprzeczne c) $x \in \{-4, 0\}$ d) $x \in \{2, 6\}$
e) $x \in \langle 1, +\infty)$ f) $x \in \{0, 2\}$

2.81. a) $x = -1$ b) $x \in \{-3, 1\}$ c) $x = -2$ d) $x \in \langle -2, +\infty)$ e) $x = 3$ f) $x \in \{-6, 0\}$

2.82. a) $x \in \langle -3, 1\rangle$ b) $x \in \left\{-4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\}$ c) $x \in \left\{-8, \frac{2}{3}\right\}$ d) równanie sprzeczne
e) $x \in (-\infty, -1\rangle$ f) $x = 1\frac{1}{2}$

2.83. a) $x \in \langle -1, 1\rangle$ b) $x \in \{0, 2\}$ c) $x \in \{-4, 2\}$ d) $x \in \{-1, 5\}$

2.84. a) $x \in \{1, 3\}$ b) $x = -1$ c) $x \in \{-1, 3\}$ d) $x \in \langle -2, 0\rangle$ e) $x \in \{-5, -1, 3\}$
f) $x \in \{1, 5\}$

2.85. a) $x \in \langle 0, +\infty)$ b) $x \in \left\{1\frac{2}{5}, 17\right\}$ c) $x \in \{-5, 5\}$ d) $x = -3$ e) $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$
f) $x \in \{-6, 0, 2\}$

Nierówności z wartością bezwzględną

2.86. a) $x \in \langle -3, 3\rangle$ b) $x \in (-\infty, -6\rangle \cup \langle 8, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -8) \cup (-6, 2) \cup (4, +\infty)$
d) $x \in (-4, 0) \cup (4, 8)$ e) $x \in \langle -8, -2\rangle \cup \langle -1, 5\rangle$
f) $x \in \left(-\infty, -1\frac{2}{3}\right\rangle \cup \left\langle -1, 2\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

2.87. a) $x \in \langle -3, 5\rangle$ b) $x \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$ c) $x \in \langle -9, -7\rangle \cup \langle -3, -1\rangle$
d) $x \in \{1, 5\}$ e) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 3) \cup (7, +\infty)$ f) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \{1\} \cup \langle 5, +\infty)$

2.88. a) $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ b) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{5}, +\infty\right)$ c) $x \in \langle -14, -2\rangle$ d) $x \in \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$
e) nierówność sprzeczna f) $x \in \mathbf{R}$

2.89. a) $x \in (0, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -2\rangle$ c) $x \in \mathbf{R}$ d) $x \in (-\infty, 3\rangle \cup \langle 7, +\infty)$
e) $x \in (-4, 5)$ f) $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

2.90. a) $x \in (-\infty, -4) \cup \left(3\frac{1}{5}, +\infty\right)$ b) $x \in (-5, -1)$ c) $x \in (-\infty, -6) \cup (-5, 0) \cup (1, +\infty)$
d) $x \in (-4, 2) \cup (2, 8)$ e) $x \in \langle -4, -1\rangle$ f) $x \in (-\infty, -6) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

2.91. a) $x \in \left(1\frac{2}{3}, 2\right)$ b) $x \in (1, 2\rangle$ c) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ d) $x \in (-\infty, 1\rangle$
e) $x \in \langle -6, -2\rangle \cup \langle 0, 4\rangle \cup \langle 6, 10\rangle$ f) $x \in (-\infty, -2) \cup \left\langle 2, 3\frac{1}{3}\right) \cup (6, +\infty)$

2.92. a) $x \in (1, 2)$ b) $x \in \langle -2, +\infty)$ c) $x \in \mathbf{R}$ d) nierówność sprzeczna

2.93. a) $x \in (-\infty, -12) \cup (20, +\infty)$ b) $x \in \left(1\frac{2}{3}, +\infty\right)$ c) $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$
d) $x \in (-\infty, 3)$ e) $x \in (-\infty, -6) \cup (2, 4)$ f) $x \in \left(-1\frac{1}{2}, +\infty\right)$

2.94. a) $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ b) $x \in \langle -2, 4\rangle$ c) $x \in \mathbf{R}$ d) $x \in \langle -1, 5\rangle$
e) $x \in \langle -1, 3\rangle$ f) nierówność sprzeczna

Równanie liniowe z parametrem

2.95. a) $m \in \mathbf{R} - \{-1\}$, $x = \frac{1}{m+1}$ b) $m \in \mathbf{R} - \{4\}$, $x = \frac{m}{m-4}$ c) $m \in \mathbf{R} - \{0\}$, $x = 0$
d) $m \in (0, +\infty)$, $x = \frac{2}{\sqrt{m}}$ e) $m \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$, $x = \frac{1}{m+3}$ f) $m \in \mathbf{R} - \{-2\}$, $x = m - 2$

2.96. a) $a = -2$ b) $a = -5$ c) $a \in \{-1, 0, 1\}$ d) nie istnieje takie a e) $a = 3$
f) $a \in \{0, 6\}$

2.97. a) $k = 0$ b) $k = 2$ c) nie istnieje takie k d) nie istnieje takie k e) $k \in \{-4, 4\}$
f) $k = 1$

2.98. a) $m \in \mathbf{R} - \{0\}$ b) $m \in \mathbf{R}$ c) $m \in \mathbf{R} - \{3\}$ d) $m \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ e) $m \in \mathbf{R}$
f) $m \in \mathbf{R} - \{-1, 0\}$

2.99. a) jeśli $m \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{m+2}{2-|m|}$; jeśli $m = -2$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli $m = 2$, to równanie nie ma rozwiązań

b) jeśli $a \in \mathbf{R} - \{8\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{a}{a-8}$; jeśli $a = 8$, to równanie nie ma rozwiązań

c) jeśli $k \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{k-1}$; jeśli $k = 0$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli $k = 1$, to równanie nie ma rozwiązań

d) jeśli $b \in \mathbf{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = 0$; jeśli $b \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania)

e) jeśli $a \in \mathbf{R} - \{2\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{a^2+4}{a-2}$; jeśli $a = 2$, to równanie nie ma rozwiązań

f) jeśli $b \in \mathbf{R} - \{-6, 6\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{b+6}$; jeśli $b = 6$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli $b = -6$, to równanie nie ma rozwiązań

2.100. a) jeśli $m \in \mathbf{R} - \{-4, 4\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{m^2}{m^2-16}$, jeśli $m \in \{-4, 4\}$, to równanie jest sprzeczne

b) jeśli $p \in \mathbf{R} - \{1\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = p - 1$, jeśli $p = 1$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania)

c) jeśli $p \in \mathbf{R} - \{-1\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = p + 1$; jeśli $p = -1$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania)

d) jeśli $m \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{2(2m-1)}$; jeśli $m = -\frac{1}{2}$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli $m = \frac{1}{2}$, to równanie nie ma rozwiązań

e) jeśli $k \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{k}{k+3}$; jeśli $k = 3$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli $k = -3$, to równanie nie ma rozwiązań

f) jeśli $m \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{m^2+m-2}{m^2-1}$; jeśli $m = 1$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli $m = -1$, to równanie nie ma rozwiązań

2.101. a) jeśli $m \in \mathbf{R} - \{1, 3\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{m-3}{1-|m-2|}$; jeśli $m = 1$, to równanie jest sprzeczne; jeśli $m = 3$, to równanie jest tożsamościowe

b) jeśli $m \in \mathbf{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{5m+1}{|-m-1|+2}$

c) jeśli $m \in \mathbf{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{m^2-3}{|3m-2|}$; jeśli $m=\frac{2}{3}$, to równanie jest sprzeczne

d) jeśli $m \in \mathbf{R} - \{1\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{1}{|m-2|-m}$; jeśli $m = 1$, to równanie jest sprzeczne

e) jeśli $m \in \mathbf{R} - \{-6, -2\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{m+2}{2|m+3|+m}$; jeśli $m = -2$, to równanie jest tożsamościowe; jeśli $m = -6$, to równanie jest sprzeczne

f) jeśli $m \in \mathbf{R} - \{-4, -2, 6, 8\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{m^2-6m-16}{||m-2|-5|-1}$; jeśli $m \in \{-2, 8\}$, to równanie jest tożsamościowe; jeśli $m \in \{-4, 6\}$, to równanie jest sprzeczne

2.102. a) jeśli $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{2b}{a}$; jeśli $a = b = 0$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań

b) jeśli $m \neq 1$ i $k \in \mathbf{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{k}{1-m}$; jeśli $m = 1$ i $k = 0$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $m = 1$ i $k \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań

c) jeśli $d \neq -2c$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = 0$; jeśli $d = -2c$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań

d) jeśli $p \neq 5$ i $k \in \mathbf{R}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{k+1}{5-p}$; jeśli $p = 5$ i $k = -1$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $p = 5$ i $k \neq -1$, to równanie jest sprzeczne

e) jeśli $b \neq c$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{b}{b-c}$; jeśli $b = c = 0$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $b = c$ i $b \neq 0$, to równanie jest sprzeczne

f) jeśli $a \neq -b$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{ab}{a+b}$; jeśli $a = b = 0$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $a = -b$ i $a \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań

Nierówność liniowa z parametrem

2.103. a) $\left(-\infty, 2\frac{1}{3}\right)$ b) $\mathbf{R}$ c) $\left(-\infty, -2\frac{3}{11}\right)$

2.104. a) $\left(\frac{1}{8}, +\infty\right)$ b) $\mathbf{R}$ c) $(0, +\infty)$

2.105. a) $(-\infty, 1\rangle$ b) $\mathbf{R}$ c) $\mathbf{R}$

2.106. a) $(2, +\infty)$ b) $\varnothing$ c) $\varnothing$

2.107. a) $m = 28$ b) $m = 2$ c) $m = -7$ d) $m=1\frac{1}{2}$

2.108. a) $p = 3$ b) $p=-\sqrt{5}$

2.109. a) $p = -3$ b) $p = -11$

2.110. a) $m\in\langle -2, +\infty)$ b) $m\in\left\langle 1\frac{1}{4}, +\infty\right)$ c) $m\in(-5, +\infty)$ d) $m\in\left(-4\frac{1}{2}, +\infty\right)$

2.111. a) $k = 3$ b) $k = 2$ c) $k \in \langle -1, +\infty)$ d) $k \in \langle -2, +\infty)$

2.112. a) $m = 1$ b) $m = -5$ c) $m \in \{1, 5\}$ d) $m = -2$

2.113. a) $m = 2$ b) $m = 4$ c) $m \in \{-1, 1\}$ d) $m = -4$ e) $m = 2$ f) $m = -2$

Równania liniowe z wartością bezwzględną i z parametrem

2.114. a) $x \in \{-1, 1\}$ b) równanie tożsamościowe c) równanie sprzeczne d) równanie sprzeczne

2.115. a) $k \in (-1, +\infty)$ b) $k \in (2, +\infty)$ c) $k \in \mathbf{R} - \{0\}$ d) $k=-\frac{1}{3}$ e) $k\in(-\infty, 0)\cup(0, 4)$ f) $k=\frac{2}{5}$

2.116. a) jeśli $p = 0$, to równanie jest tożsamościowe; jeśli $p \in (-\infty, 0)$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p \in (0, +\infty)$, to równanie ma dwa rozwiązania

b) jeśli $p = 2$, to równanie ma jedno rozwiązanie; jeśli $p \in (-\infty, 2)$, to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli $p \in (2, +\infty)$, to równanie nie ma rozwiązań

c) jeśli $p = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie; jeśli $p \in \mathbf{R} - \{0\}$, to równanie nie ma rozwiązań

d) jeśli $p \in \{-3, 3\}$, to równanie jest tożsamościowe; jeśli $p \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie

e) jeśli $p \in \langle -1, 1\rangle$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, to równanie ma dwa rozwiązania

f) jeśli $p \in \langle -6, 2\rangle$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$, to równanie ma dwa rozwiązania

2.117. a) jeśli $p \in (-\infty, -4)$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p \in (-1, +\infty) \cup \{-4\}$, to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli $p \in (-4, -1)$, to równanie ma cztery rozwiązania; jeśli $p = -1$, to równanie ma trzy rozwiązania

wzór funkcji: $f(p) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } p \in (-\infty, -4) \\ 2, \text{ jeśli } p \in (-1, +\infty) \cup \{-4\} \\ 3, \text{ jeśli } p = -1 \\ 4, \text{ jeśli } p \in (-4, -1) \end{cases}$

b) jeśli $p \in (-1, +\infty)$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p \in (-\infty, -7) \cup \{-1\}$, to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli $p = -7$, to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli $p \in (-7, -1)$, to równanie ma cztery rozwiązania

wzór funkcji: $f(p) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } p \in (-1, +\infty) \\ 2, \text{ jeśli } p \in (-\infty, -7) \cup \{-1\} \\ 3, \text{ jeśli } p = -7 \\ 4, \text{ jeśli } p \in (-7, -1) \end{cases}$

2.118. jeśli $a \in (-9, +\infty)$ i $a \neq 9$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x = -a - 6$ oraz $x = a + 12$

2.119. $k \in \langle -4, +\infty)$

2.120. $m \in \langle 2, +\infty)$

2.121. a) $p \in (5, 7)$ b) $p \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right)$

2.122. a) $p \in (4, +\infty)$ b) $p \in \left(\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}\right)$

2.123. a) $k \in \left\langle 1\frac{1}{2}, 3\right)$ b) $k \in \langle 2, 5\rangle$

2.124. $m \in \langle -6, -4\rangle$

2.125. a) $k \in \left\langle 3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right\rangle$ b) $k \in \left\langle 0, 1\frac{1}{4}\right)$

2.126. a) $p \in (-10, +\infty)$ b) $p \in \left(1\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}\right)$

2.127. a) jeśli $p \in (-\infty, 2)$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p \in (2, +\infty)$, to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli $p = 2$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista należąca do przedziału $\langle 0, 2\rangle$)

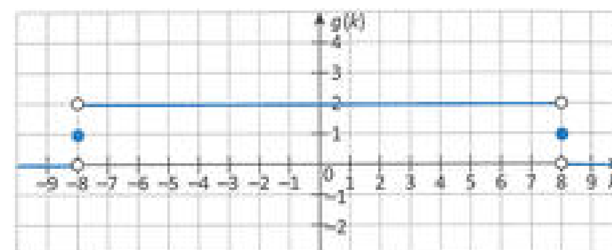
b) jeśli $p \in (-\infty, -1)$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p = -1$, to równanie ma jedno rozwiązanie; jeśli $p \in (-1, +\infty)$, to równanie ma dwa rozwiązania

c) jeśli $p \in (5, +\infty)$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p \in (-\infty, 2) \cup \{5\}$, to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli $p = 2$, to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli $p \in (2, 5)$, to równanie ma cztery rozwiązania

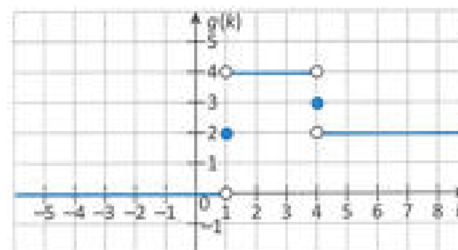
d) jeśli $p \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(3\frac{1}{4}, +\infty\right)$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $p = -\frac{1}{2}$, to równanie ma jedno rozwiązanie; jeśli $p \in \left(-\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}\right)$, to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli $p = 3\frac{1}{4}$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista należąca do zbioru $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 0, +\infty)$)

2.128. $a \in \left\langle 1\frac{1}{3}, 3\right\rangle$

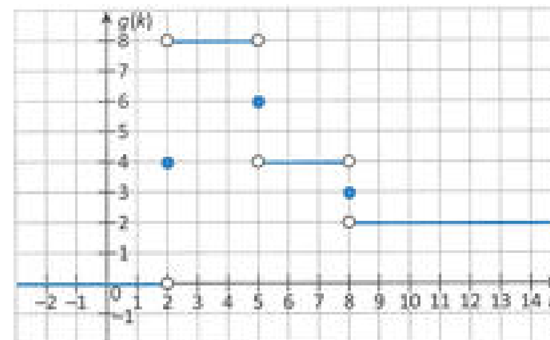
2.129. a) $g(k) = \begin{cases} 2, \text{ jeśli } |k| < 8 \\ 1, \text{ jeśli } |k| = 8 \\ 0, \text{ jeśli } |k| > 8 \end{cases}$



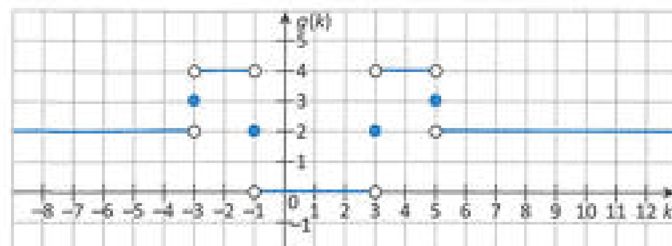
b) $g(k) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } k \in (-\infty, 1) \\ 2, \text{ jeśli } k \in (4, +\infty) \cup \{1\} \\ 3, \text{ jeśli } k = 4 \\ 4, \text{ jeśli } k \in (1, 4) \end{cases}$



c) $g(k) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } k \in (-\infty, 2) \\ 2, \text{ jeśli } k \in (8, +\infty) \\ 3, \text{ jeśli } k = 8 \\ 4, \text{ jeśli } k \in (5, 8) \cup \{2\} \\ 6, \text{ jeśli } k = 5 \\ 8, \text{ jeśli } k \in (2, 5) \end{cases}$



d) $g(k)=\begin{cases}0, \text{ jeśli } k\in(-1,3)\\ 2, \text{ jeśli } k\in(-\infty,-3)\cup\{-1,3\}\cup(5,+\infty)\\ 3, \text{ jeśli } k\in\{-3,5\}\\ 4, \text{ jeśli } k\in(-3,-1)\cup(3,5)\end{cases}$



Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

2.130. a) -2 b) 3 c) 26 d) 13

2.131. a) $\begin{cases}x=\frac{-17}{41}\\ y=\frac{23}{41}\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=2\frac{14}{17}\\ y=2\frac{10}{17}\end{cases}$ c) $\begin{cases}x=-6\frac{4}{19}\\ y=-3\frac{12}{19}\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=\frac{15\sqrt{3}+8}{17}\\ y=\frac{20-4\sqrt{3}}{17}\end{cases}$

2.132. a) $\begin{cases}x=\frac{5}{23}\\ y=-8\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=5\\ y=7\end{cases}$ c) $\begin{cases}x=0\\ y=-\sqrt{3}\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=\frac{3\sqrt{2}+1}{3}\\ y=\frac{\sqrt{2}-2}{3}\end{cases}$

2.133. a) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{6\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=\frac{3a}{2(6-a)}\\ y=\frac{2(a-3)}{a-6}\end{cases}$

jeśli $a=6$, to układ jest sprzeczny

b) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{-1,1\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=\frac{a}{a^2-1}\\ y=\frac{2-a^2}{a^2-1}\end{cases}$

jeśli $a\in\{-1,1\}$, to układ jest sprzeczny

c) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{-4,4\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=\frac{-3}{a-4}\\ y=\frac{a^2+6a+8}{a^2-16}\end{cases}$

jeśli $a=-4$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb postaci $\left(x, 2x-\frac{1}{2}\right)$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$; jeśli $a=4$, to układ jest sprzeczny

d) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{-3,3\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=\frac{1}{a-3}\\ y=\frac{a^2-a-12}{9-a^2}\end{cases}$

jeśli $a=-3$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb postaci $\left(x, -2x-\frac{3}{2}\right)$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$; jeśli $a=3$, to układ jest sprzeczny

2.134. a) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{-6\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$

jeśli $a=-6$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb mającymi postać $\left(x, -\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$

b) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{0,3\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=-3\\ y=\frac{a^2-2a-3}{a(a-3)}\end{cases}$

jeśli $a=3$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb mającymi postać $\left(x, -\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$; jeśli $a=0$, to układ jest sprzeczny

c) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{-2,2\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=\frac{2(a^2-6)}{a^2-4}\\ y=\frac{a}{a^2-4}\end{cases}$

jeśli $a\in\{-2,2\}$, to układ jest sprzeczny

d) jeśli $a\in \boldsymbol{R}-\{0\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=\frac{a+1}{2}\\ y=\frac{a-1}{2}\end{cases}$

jeśli $a=0$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb mającymi postać $(x, x-1)$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$

2.135. $k\in\langle 12, 18)$

2.136. $k\in\left(-\infty, -2\frac{2}{3}\right\rangle\cup\left\langle\frac{2}{3}, +\infty\right)$

2.137. $a\in(-8, 16)$

2.138. $a=12$

2.139. a) $p\in\{0, 8\}$ b) $(5, -3)$

2.140. $k\in\langle -2, +\infty)$

2.141. $a=\frac{1}{3}$

2.142. $m\in\left\langle 1\frac{1}{2}, +\infty\right)$

2.143. $p \in (-\infty, -9) \cup \left\langle -4\frac{1}{2}, +\infty \right)$

2.144. $k \in \left(3\frac{2}{3}, 4\right) \cup \left(4, 4\frac{1}{3}\right)$

Test sprawdzający do rozdziału 2.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**D**	**C**	**A**	**D**	**B**	**D**	**B**	**A**	**D**	**B**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. a) $a = 3\frac{1}{3}$; wartość wyrażenia: 2 b) $b = 55$; wartość wyrażenia: -335

12. 1

14. a) $1 - x$ b) $-3a - 3b$

15. a) $x \in \{-1, 9\}$ b) równanie sprzeczne c) $x = -3$

16. a) $x \in \{-10, -4\}$ b) $x \in \{-13, 5\}$

17. a) $x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 11, +\infty)$ b) $x \in (-18, -8)$

18. a) $x \in \{-8, -2\}$ b) $x \in \langle -7, 3\rangle$

19. a) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ b) $x = -5$ c) $x \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$ d) $x \in \boldsymbol{R}$

20. a) $x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 4, 6\rangle$ b) $x \in \langle -10, -5) \cup (-3, 2\rangle$

21. $A \cup B = \boldsymbol{R}$, $A \cap B = (-7, -1\rangle$, $A - B = (-1, 3)$, $B - A = (-\infty, -7\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

24. a) $x = 7$ b) $x \in \langle -3, 1\rangle$

25. a) równanie sprzeczne b) $x \in \{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$

26. a) $x \in (-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (5\sqrt{2}+2, +\infty)$ b) $x \in \boldsymbol{R} - \{-2\}$

27. jeśli $p = 1$, to drugim rozwiązaniem równania jest liczba -5; jeśli $p = -11$, to drugim rozwiązaniem równania jest liczba 19

28. a) $x \in \left\{-5\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right\}$ b) $x\left\{-3\frac{1}{3}, 2\right\}$ c) $x = 6$ d) $x \in \langle -3, 2)$

29. a) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle 13, +\infty)$ b) $x \in \langle -2, 22\rangle$

30. a) $x \in \{-2, 1, 4\}$ b) $x \in \{-5, -2, 1\}$

31. a) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, 4\rangle \cup \langle 6, +\infty)$ b) $x \in (0, 4)$

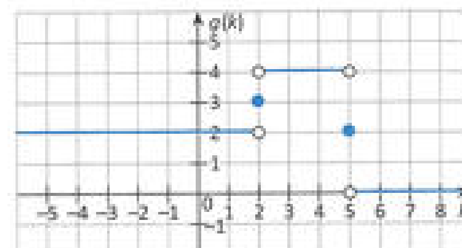
33. a) jeśli $k = -\frac{2}{3}$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $k \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = 2 - 3k$
b) jeśli $k = -2$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $k = 2$, to równanie nie ma rozwiązań; jeśli $k \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{k^2+5k+6}{k^2-4}$

34. a) $p = 1{,}4$ b) $p \in \langle 1, +\infty)$

35. a) $m = -5$ b) $m = 1$

36. a) $m \in (1, 6)$ b) $m \in (1, +\infty)$ c) $m \in \{-5, -1\}$

37. $g(k) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } k \in (5, +\infty) \\ 2, \text{ jeśli } k \in (-\infty, 2) \cup \{5\} \\ 3, \text{ jeśli } k = 2 \\ 4, \text{ jeśli } k \in (2, 5) \end{cases}$



38. jeśli $a \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = \frac{4}{3a+2} \\ y = \frac{4}{3a+2} \end{cases}$; jeśli $a = \frac{2}{3}$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(x, 2 - x)$, $x \in \boldsymbol{R}$; jeśli $a = -\frac{2}{3}$, to układ nie ma rozwiązań

39. $k \in (-5, +\infty)$

3. Funkcja kwadratowa

Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z klasy 1.

3.1. a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$; $a = 2$, $b = -3$, $c = -3$ b) $f(x) = -2x^2 - 16x - 27$; $a = -2$, $b = -16$, $c = -27$ c) $f(x) = -6x^2 + 3x$; $a = -6$, $b = 3$, $c = 0$ d) $f(x) = 4x^2$; $a = 4$, $b = 0$, $c = 0$

3.2. a) $y = \frac{2}{3}x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = 2\sqrt{5}x^2$

3.3. a) $b = 2$, $c = -15$ b) $b = -5$, $c = 0$

3.4. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ b) $f(x) = -3x^2 + 9$

3.5. a) $y = \frac{1}{3}(x+5)^2$ b) $y = -2(x-3)^2$ c) $y = \frac{2}{5}x^2 + 4$ d) $y = -x^2 - 2$

3.6. a) $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 3$ b) $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 - 5$ c) $y = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 4$
d) $y = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + 2$

3.7. a) $W(-3, 0)$, $(0, -9)$ b) $W(1, 1)$, $(0, 3)$ c) $W(0, -4)$, $(0, -4)$
d) $W(-3, -2)$, $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$ e) $W(1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ f) $W(2, -1)$, $(0, -2)$

3.8. a) $ZW = (-\infty, 3\rangle$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$; $x = 0$ b) $ZW = \langle -5, +\infty)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$; $x = 0$ c) $ZW = \langle 0, +\infty)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -4\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -4, +\infty)$; $x = -4$ d) $ZW = (-\infty, 7\rangle$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$; $x = 1$ e) $ZW = \langle -3, +\infty)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -5\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -5, +\infty)$; $x = -5$ f) $ZW = (-\infty, -4\rangle$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$; $x = 2$

3.9. a) $f(x)=-\frac{1}{3}(x-2)^2$, $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+1\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

b) $f(x)=\frac{1}{4}(x-3)^2+1$, $f(x)=\frac{1}{4}x^2-1\frac{1}{2}x+3\frac{1}{4}$

c) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$, $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$

d) $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-2\frac{1}{2}\right)^2-3\frac{1}{8}$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\frac{1}{2}x$

e) $f(x)=-\frac{1}{3}(x+1)^2-1$, $f(x)=-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\frac{1}{3}$

f) $f(x)=\frac{1}{5}(x+4)^2$, $f(x)=\frac{1}{5}x^2+1\frac{3}{5}x+3\frac{1}{5}$

3.10. -6 oraz 0

3.11. $f(x)=-\frac{1}{5}(x-3)^2+4$

3.12. $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$

3.13. $f(x) = 5(x+3)^2 + 5$

3.14. $f(x)=-\frac{3}{4}(x-2)^2+4$

3.16. a) $x = 3$ b) $y = x$ c) $y = -4$ d) $y = -2x$

Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

3.17. a) $f(x) = 4x^2 - 24x + 16$ b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x+2$ c) $f(x) = -5x^2 + 10x - 4$

3.18. a) $f(x) = (x-1)^2 - 1$ b) $f(x)=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+5\frac{1}{2}$ c) $f(x) = -(x-1)^2 + 9$

d) $f(x) = 3(x-4)^2 + 2$ e) $f(x)=\frac{1}{2}(x+3)^2-4$ f) $f(x)=-\frac{1}{4}(x-4)^2+6$

3.19. a) $\Delta = 0$ b) $\Delta = 49$ c) $\Delta = 64$ d) $\Delta = -3$ e) $\Delta = 0$ f) $\Delta = -15$

3.20. a) $f(x)=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-1\frac{1}{8}$ b) $f(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = -(x-5)^2$

d) $f(x) = (x-3)^2 - 4$ e) $f(x)=4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{15}{16}$ f) $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-5$

3.21. a) $b = 0$ b) $b = 10$ c) $b = 2$ d) $b = -5$

3.22. a) $a = -1, b = 8, c = -13$ b) $a = 2, b = -2, c = 1{,}5$ c) $a = 6, b = 0, c = -5$
d) $a = -3, b = -6, c = 0$ e) $a = -4, b = 16, c = -19$ f) $a = 5, b = -3, c = 0{,}5$

3.23. a) $a = -3$, $(0, -19)$ b) $a = 2\sqrt{3}$, $(0, -\sqrt{3})$ c) $a=\frac{1}{2}$, $\left(0, 9\frac{1}{2}\right)$

d) $a = -1$, $(0, -18)$ e) $a=\frac{1}{5}$, $(0, 4)$ f) $a = 4$, $(0, -4)$

3.24. a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$; $(0, 5)$, $A(6, 5)$ b) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+4)^2+1$; $(0, -7)$, $A(-8, -7)$

c) $f(x) = 2(x-2)^2 + 1$; $(0, 9)$, $A(4, 9)$ d) $f(x)=-\frac{1}{3}(x-4)^2-\frac{2}{3}$; $(0, -6)$, $A(8, -6)$

e) $f(x)=-2\left(x+1\frac{1}{2}\right)^2+4\frac{1}{2}$; $(0, 0)$, $A(-3, 0)$ f) $f(x)=\frac{1}{4}(x+4)^2-3$; $(0, 1)$, $A(-8, 1)$

3.25. a) $ZW = \langle 0, +\infty)$ b) $ZW = (-\infty, 7\rangle$ c) $ZW = (-\infty, 6\rangle$ d) $ZW = \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right)$

3.26. a) f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$
b) f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 10\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 10, +\infty)$
c) f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 6\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 6, +\infty)$
d) f jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty, -7\frac{1}{2}\right\rangle$, malejąca w przedziale $\left\langle -7\frac{1}{2}, +\infty\right)$

3.27. a) są dwie takie funkcje: $f(x) = (x+3)^2 - 4$ oraz $g(x) = (x-3)^2 - 4$ c) $x = 0$

Miejsce zerowe funkcji kwadratowej.
Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

3.28. a) 0 b) 2 c) 2 d) 0 e) 1 f) 0

3.29. a) $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ b) 3 c) -3, 3 d) -8, 4 e) f nie ma miejsc zerowych f) -3, 1

3.30. a) -9, -1 b) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) 4, 10 d) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e) -4 f) funkcja f nie ma miejsc zerowych

3.31. a) -2, 7 b) 0, 4 c) -5 d) $-\sqrt{2}$, 8 e) 1, 3 f) $4+\sqrt{2}$

3.32. a) 0, 2 b) $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) -24, 0 d) -5 e) funkcja nie ma miejsc zerowych f) 1

3.33. a) $-\frac{1}{3}$ b) 0, 4 c) $\frac{4}{5}$ d) funkcja nie ma miejsc zerowych e) -8 f) 2

3.34. a) 2 b) 0 c) 1 d) 1 e) 0 f) 2

3.35. a) $-5, 1$ b) $-1, \frac{1}{3}$ c) -4 d) funkcja nie ma miejsc zerowych e) $-8, 2$ f) $-3, 1$

3.36. a) $\Delta = 9$; m. zerowe: 1, 4 b) $\Delta = 4$; m. zerowe: $0, \frac{2}{3}$ c) $\Delta = -16$; funkcja nie ma miejsc zerowych d) $\Delta = 1$; m. zerowe: $-1\frac{1}{3}, -1$ e) $\Delta = 20$; m. zerowe: $6-2\sqrt{5}$, $6+2\sqrt{5}$ f) $\Delta = 76$; m. zerowe: $\frac{5-\sqrt{19}}{2}, \frac{5+\sqrt{19}}{2}$

3.37. a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ b) $f(x) = 8x^2 - 96x$ c) $f(x) = \frac{3}{5}x^2 + 6x + 15$
d) $f(x) = -5x^2 + 25x + 120$ e) $f(x) = -2x^2 + 6$ f) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$

3.38. a) $y = \sqrt{2}(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ b) $y = -3x(x+2)$ c) $y = \frac{1}{3}(x-7)^2$
d) $y = -\frac{1}{3}(x-4)(x-8)$ e) $y = 7(x+2)^2$ f) $y = \frac{2}{3}\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)$

3.39. a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+10)(x+2)$ b) $f(x) = \frac{2}{5}x(x-4)$ c) nie istnieje
d) $f(x) = -4(x-1)(x-9)$ e) $f(x) = \frac{1}{8}(x-4)^2$ f) $f(x) = \frac{5}{7}(x-7)(x+3)$

3.40. a) $W(1, 125)$ b) $W(0, -32)$ c) $W(-5, -100)$ d) $W(6, 3)$

3.41. a) $f(x) = (x+2)^2 - 9$ b) $f(x) = 2\sqrt{3}(x+2)^2 - 8\sqrt{3}$ c) $f(x) = 2\left(x - \sqrt{6}\right)^2$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 18$ e) $f(x) = \frac{3}{5}(x+2)^2 - 5\frac{2}{5}$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$

3.42. a) $f(x) = (x-3)(x+1)$ b) $f(x) = -1\cdot(x+6)x$ c) $f(x) = 4(x-7)(x-3)$
d) $f(x) = -9(x+4)x$ e) nie istnieje f) nie istnieje

3.43.

Wzór funkcji kwadratowej f w postaci:		
iloczynowej	ogólnej	kanonicznej
a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+4)(x-1)$	$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$	$f(x) = -\frac{1}{4}\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{9}{16}$
b) $f(x) = \frac{2}{5}(x-5)(x-2)$	$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{14}{5}x + 4$	$f(x) = \frac{2}{5}\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{10}$
c) $f(x) = -\frac{1}{5}x(x-3)$	$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x$	$f(x) = -\frac{1}{5}\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{20}$
d) $f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-2)$	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$	$f(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{12}$

3.45. *wskazówka:* Oblicz $f(1)$.

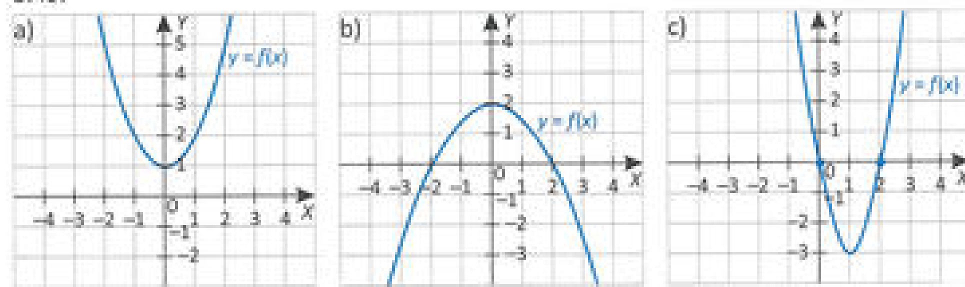
3.46. $\Delta = 4$

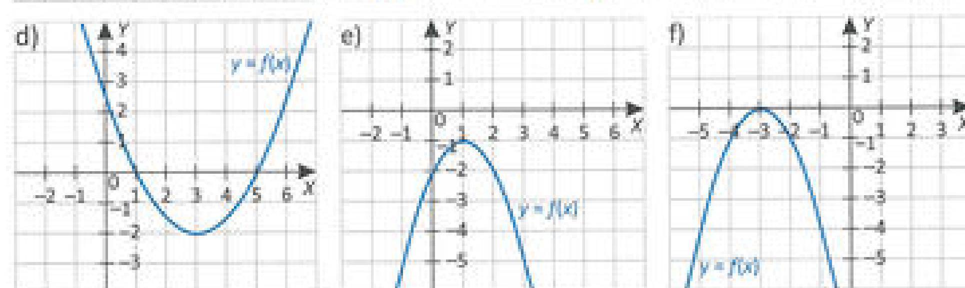
3.47. a) $f(x) = -(x+2)(x-1)$ b) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{25}{8}$ $f(x) = \frac{1}{8}(x+5)^2$

3.48. $\Delta = 1$, $k \in (-17, +\infty)$

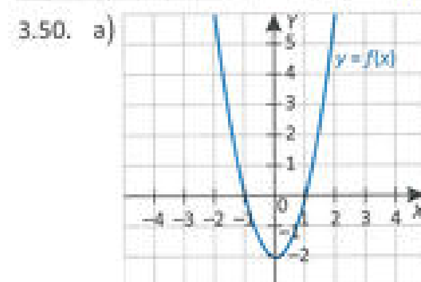
Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych.
Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu

3.49.

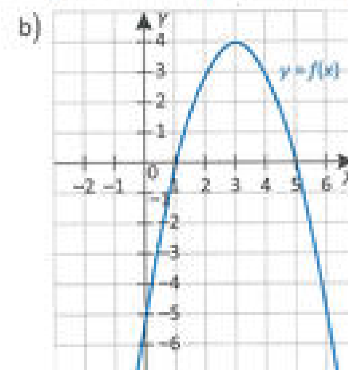




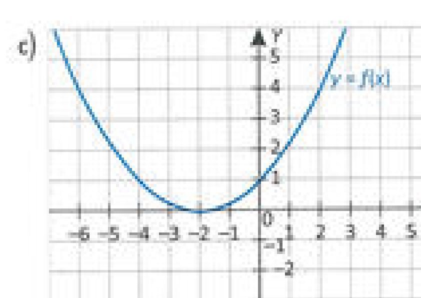
3.50. a)



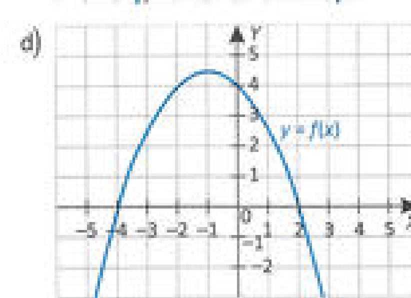
b)



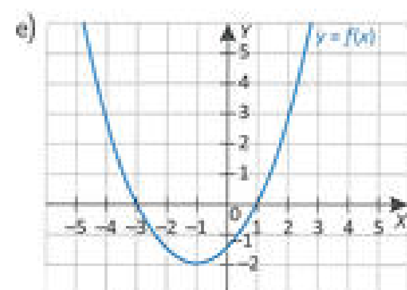
c)



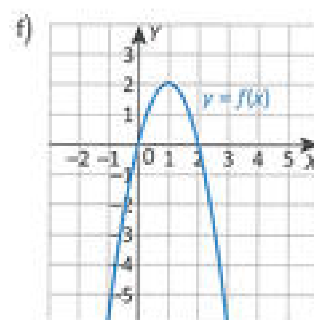
d)



e)

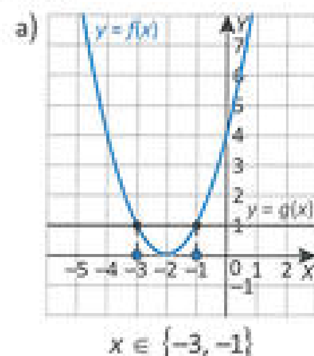


f)



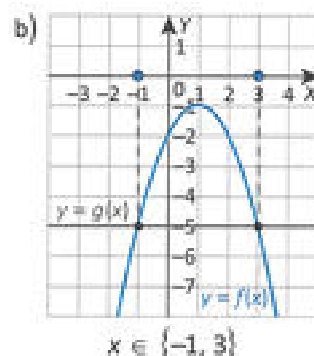
3.51.

a)



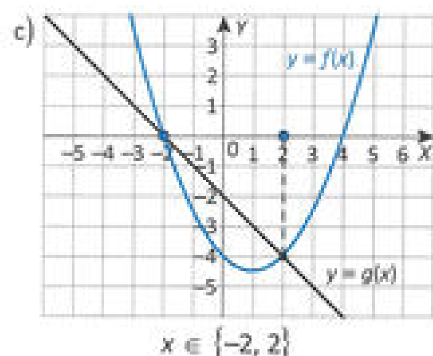
$x \in \{-3, -1\}$

b)



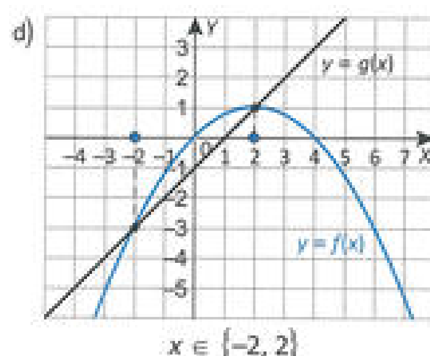
$x \in \{-1, 3\}$

c)



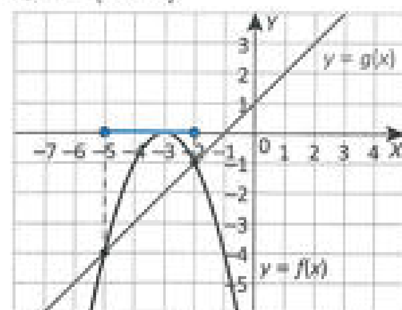
$x \in \{-2, 2\}$

d)



$x \in \{-2, 2\}$

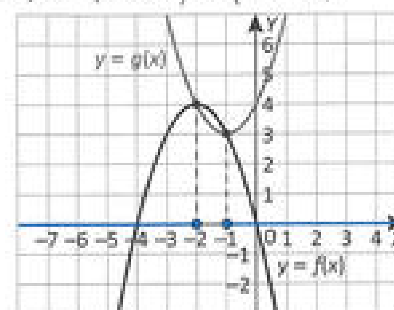
3.52. a) $x \in \langle -5, -2 \rangle$



b) $x \in (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$

c) $x \in (1, 8)$

3.53. a) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle -1, +\infty)$



b) $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$

c) $x \in (-\infty, 0)$

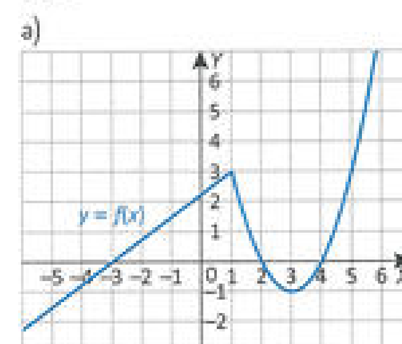
3.54. a) $a > 0, b < 0, c > 0$ b) $a < 0, b > 0, c < 0$ c) $a < 0, b < 0, c < 0$ d) $a > 0, b > 0, c > 0$

3.55. a) $(-\infty, 1\rangle$, $\langle 3, +\infty)$ b) 0, 2, 6 c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2) \cup (6, +\infty)$

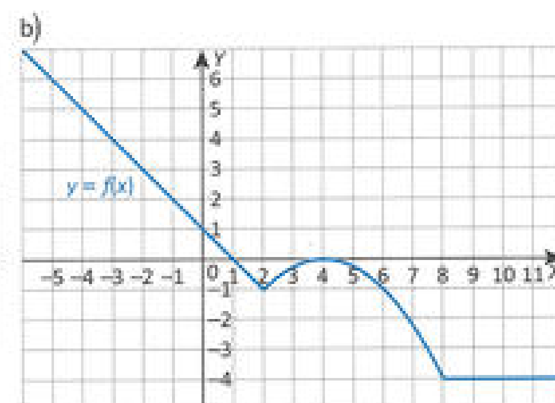
3.56. b) $ZW = (-\infty, 2\rangle$ c) -6 d) $x \in \langle -3, -1 \rangle$

3.57.

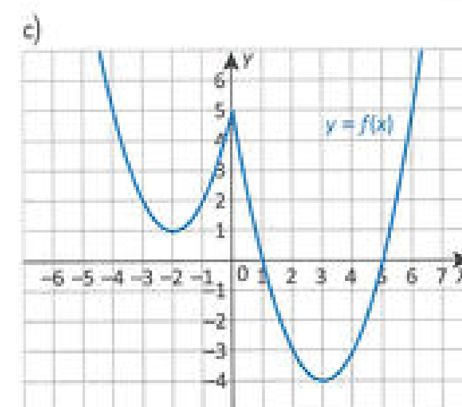
a)



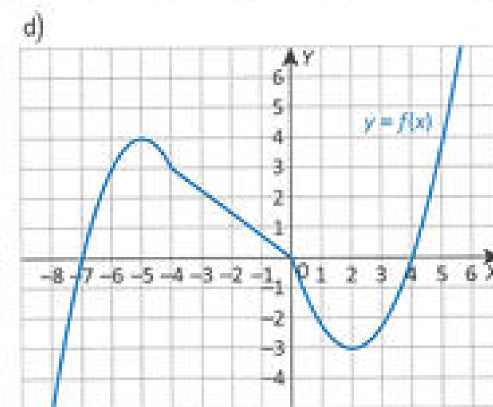
b)



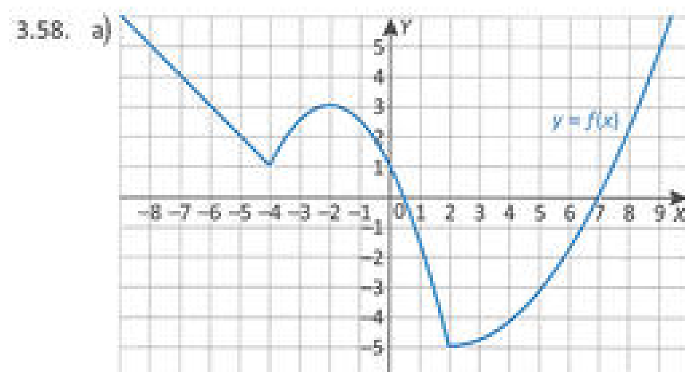
c)



d)



3.58. a)



b) $ZW = \langle -5, +\infty)$ c) funkcja f jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, -4\rangle$, $\langle -2, 2\rangle$, rosnąca w przedziałach: $\langle -4, -2\rangle$, $\langle 2, +\infty)$ d) $f(-2\pi)\cdot f(\sqrt{2}+1) < 0$

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności

3.59. $b = 1,\ c = -1$

3.60. $b = -1,\ c = -18$

3.61. $b = 4,\ c = 5$

3.62. $(b = -4,\ c = -8)$ lub $(b = 4,\ c = -8)$

3.63. $b = 12,\ c = 8$

3.64. $f(x) = -0{,}25x^2 - 2{,}5x - 4$

3.65. $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$

3.66. $f(x) = -3x^2 - 12x - 8$

3.67. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$

3.68. $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 5$

3.69. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 30$

3.70. $f(x) = -2x^2 + 24x + 90$

3.71. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 13x - 60$

3.72. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

3.73. $f(x) = -2(x-4)(x+10)$

3.74. $f(x) = \frac{1}{3}(x-6)(x+3)$

3.75. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x + 18$

3.76. $a = \frac{1}{2},\ b = -3$

3.77. $a = -4,\ b = 24$

3.78. $a = -2,\ b = 10,\ c = -12$

Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

3.79.

	a)	b)	c)	d)
wartość najmniejsza	1	−6	−2	−9
wartość największa	5	−2	0	−5

3.80.

	a)	b)	c)	d)
wartość najmniejsza	2	2	0	−4
wartość największa	6	4	2	0

3.81.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
wartość najmniejsza	−1	$4\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-24\sqrt{3}$	$-6\frac{1}{4}$	$10\frac{4}{5}$
wartość największa	2	5	$1\frac{2}{3}$	$-9\sqrt{3}$	$-5\frac{3}{4}$	$11\frac{9}{20}$

3.82. a) największa wartość: 108, dla argumentu −2 c) w przedziale $\langle -4, 3\rangle$ najmniejsza wartość: 96, największa wartość: 105

3.83. a) funkcja przyjmuje wartość największą, dla argumentu 2 b) w przedziale $\langle 5, 7\rangle$ wartość największa: 3, wartość najmniejsza: 0

3.84. $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 8\frac{3}{4}$

3.85. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

3.86. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\frac{1}{2}$

3.87. $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

3.88. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 18$

3.89. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 4$

3.90. $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 1$

3.91. $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$

3.92. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

3.93. 4 m

3.94. o 10^{00}.

3.95. a) 44 m b) 11 m/s

3.96. 5 m

3.97. 100 = 50 + 50

3.98. 30 = 15 − (−15)

3.99. 18 = 9 + 9

3.100. 16 uczniów.

3.101. a) $P(x) = -x^2 + 3x + 40$; $D_p = (0, 8)$ b) $x = 1{,}5$ cm; $P = 42{,}25$ cm^2

3.102. a) $P(x) = -8x^2 + 100x$; $D_p = (0, 10)$ b) $x = 6{,}25$ cm; $P = 312{,}5$ cm^2

3.103. 15 cm

3.104. wymiary placu: 21 m × 21 m; $P = 4{,}41$ *a*

3.105. 3 m × 6 m; $P = 18$ m^2

3.106. 17,5 cm × 16,5 cm

3.107. 1 m × 0,75 m

3.108. 1,5 m × 2 m

3.109. a) $P(x) = 2x^2 - 8x + 16$; $D_p = (0, 4)$ b) *K, L, M, N* – środki boków kwadratu

3.110. 1700 zł

3.111. wysokość czynszu: 1320 zł; miesięczny zysk: 217 800 zł

3.112. a) 55 b) 52

3.113. $\frac{6}{7}$ m, $\frac{8}{7}$ m

3.114. 6 cm × 6 cm

3.115. 25 cm × 25 cm

3.116. $\frac{400}{\pi+4}$ cm, $\frac{100\pi}{\pi+4}$ cm

3.117. $\frac{32(3\sqrt{3}-4)}{11}$ m, $\frac{24(9-4\sqrt{3})}{11}$ m

3.118. a) $P(x) = -\left(\frac{\pi+4}{8}\right)x^2 + 2x$ b) $x \in \left(0, \frac{8}{\pi+2}\right)$ c) $\frac{8}{\pi+4}$ m

3.119. $\frac{8\sqrt{2}-4}{7}$ m

3.120. a) $d(t) = \sqrt{(5-60t)^2 + (40t)^2}$, $t \geq 0$ b) Odległość między samochodami będzie najmniejsza po upływie $\frac{3}{52}$ h i będzie wynosić ok. 2,8 km. *wskazówka:* Funkcja $y = d(t)$ przyjmuje wartość najmniejszą wtedy, gdy funkcja $f(t) = (50-60t)^2 + (40t)^2$ przyjmuje wartość najmniejszą. Dzieje się tak dlatego, że funkcja $y = \sqrt{x}$ jest rosnąca.

Równania kwadratowe

3.121. a) $x = -2$ b) $x \in \left\{0, 1\frac{3}{4}\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x = 1\frac{1}{2}$
e) $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ f) $x \in \{-3, 7\}$

3.122. a) $x \in \left\{-\frac{5}{9}, \frac{5}{9}\right\}$ b) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ c) $x \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$ d) $x \in \{-2, 8\}$
e) $x \in \{-4, 2\}$ f) równanie sprzeczne

3.123. a) $x \in \left\{-4, 1\frac{1}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{-1\frac{2}{3}, 4\right\}$ c) $x = \frac{2}{3}$ d) równanie sprzeczne
e) $x \in \left\{0, \frac{4}{49}\right\}$ f) $x = 1\frac{1}{4}$

3.124. a) $x \in \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$ b) $x \in \left\{1, 1\frac{1}{2}\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$
e) $x \in \left\{-2, \frac{1}{5}\right\}$ f) $x = -\frac{1}{2}$

3.125. a) $x \in \{-3, 5\}$ b) $x \in \left\{-1\frac{2}{5}, 0\right\}$ c) $x \in \{-3, 1\}$ d) $x \in \{-11, 9\}$
e) $x \in \{-5, -1\}$ f) $x \in \{-2, 1\}$

3.126. a) $x \in \{1, -5\}$ b) $x \in \{-1, 0\}$ c) $x \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$ d) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$
e) $x \in \left\{-5\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ f) $x \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

3.127. a) $x \in \{-1, 1\}$ b) równanie sprzeczne c) $x \in \left\{1\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right\}$ d) $x \in \left\{-3, 1\frac{1}{3}\right\}$
e) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$ f) $x = 5$

3.128. a) $x \in \left\{-7, \frac{3}{4}\right\}$ b) $x \in \left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \left\{-4, \frac{1}{3}\right\}$
e) $x \in \{-5, 0\}$ f) $x = -1$

3.129. a) $x \in \left\{5, -1\frac{2}{3}\right\}$ b) równanie sprzeczne c) $x \in \left\{\frac{-2-\sqrt{6}}{2}, \frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right\}$
d) $x \in \left\{\frac{3}{5}, 4\right\}$ e) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$ f) $x \in \left\{-1\frac{1}{3}, 1\right\}$

3.130. a) $x\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$ b) $x\in\left\{-4\frac{1}{2},7\right\}$ c) $x\in\left\{\frac{1}{5},1\right\}$ d) $x\in\left\{-6\frac{1}{2},0\right\}$

e) $x\in\left\{\frac{-3-\sqrt{21}}{2},\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right\}$ f) $x\in\left\{-2,1\frac{1}{2}\right\}$

3.131. a) równanie sprzeczne b) $x\in\left\{\frac{2}{3},1\right\}$ c) $x\in\left\{2\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right\}$ d) $x\in\{-12,0\}$

e) $x=-\frac{1}{3}$ f) równanie sprzeczne

3.132. a) $x\in\{0,1\}$ b) $x\in\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$ c) $x\in\left\{-6-\sqrt{5},-6+\sqrt{5}\right\}$ d) $x=3$

3.133. a) $a=-1$ lub $a=1$ b) $a=-3$ lub $a=1$

3.134 a) $x\in\{-3,2\}$ b) $x\in\{1,4\}$ c) $x\in\{0,2\}$ d) $x\in\{-4,-1\}$

3.135. $x=8a-6$

Równania prowadzące do równań kwadratowych

3.138. a) $x\in\{-4,0,4\}$ b) $x\in\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$ c) $x\in\{-1,1\}$ d) równanie sprzeczne

e) $x\in\left\{-3,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right\}$ f) $x\in\{-2,2\}$

3.139. a) $x\in\{-2,-1,1,2\}$ b) $x\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$ c) $x\in\{-4,-3,3,4\}$

d) $x\in\{-5,0,5\}$ e) równanie sprzeczne f) $x\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

3.140. a) $x\in\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right\}$ b) $x\in\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ c) $x\in\left\{-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

d) $x=0$ e) $x\in\left\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\right\}$ f) $x\in\{-2,-1,1,2\}$

3.141. a) $x\in\{-1,1\}$ b) $x\in\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ c) równanie sprzeczne d) $x\in\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$

e) $x\in\{-1,1\}$ f) $x\in\{-2,0,2\}$

3.142. a) $x\in\left\{-\sqrt{13},-2,2,\sqrt{13}\right\}$ b) $x\in\{-1,1\}$ c) $x\in\{-3,1\}$ d) równanie sprzeczne e) $x\in\{-4,0,1,5\}$ f) $x\in\{-2,-1\}$

3.143. a) $x\in\{1,16\}$; *wskazówka:* $t=\sqrt{x}$ b) $x\in\left\{\frac{1}{4},9\right\}$ c) $x\in\left\{\frac{1}{9},4\right\}$

d) $x\in\left\{\frac{1}{4},1\right\}$ e) $x=5$; *wskazówka:* $t=\sqrt{x-1}$ f) równanie sprzeczne

3.144. a) $x\in\{0,125\}$ b) $x\in\{8,27\}$ c) $x=6561$ d) $x\in\left\{\frac{81}{16},16\right\}$

3.145. a) $x\in\left\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right\}$; *wskazówka:* $t=\sqrt{x^2+1}$ b) $x\in\{-4,4\}$ c) $x\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

d) $x\in\{-2,6\}$; *wskazówka:* $t=\sqrt{x^2-4x+6}$

3.146. a) $x=13$ b) równanie sprzeczne c) $x\in\left\{2,6\frac{1}{16}\right\}$ d) $x\in\{6,86\}$

Nierówności kwadratowe

3.147. a) $x\in\boldsymbol{R}$ b) $x=0$ c) $x\in\left\langle 0,\frac{2}{3}\right\rangle$ d) $x\in(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$ e) nierówność sprzeczna f) $x\in(-\infty,0\rangle\cup\langle 1,+\infty)$

3.148. a) $x\in(-4,2)$ b) $x\in\boldsymbol{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ c) $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$ d) $x\in\boldsymbol{R}$ e) $x\in\boldsymbol{R}$,

f) $x\in\langle -2,5\rangle$

3.149. a) $x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ b) $x\in\langle -2,0\rangle$ c) $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\left\langle 1\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) $x\in\boldsymbol{R}$ e) nierówność sprzeczna f) $x=\frac{1}{2}$

3.150. a) $x\in\boldsymbol{R}$ b) $x\in\langle 0,5\rangle$ c) $x=3\frac{1}{2}$ d) $x\in(-2,1)$ e) $x\in\boldsymbol{R}$ f) nierówność sprzeczna

3.151. a) $x\in\left(-\infty,1-\sqrt{3}\right\rangle\cup\left\langle 1+\sqrt{3},+\infty\right)$ b) $x\in\left(-\infty,-1\frac{1}{2}\right)\cup\left(2\frac{1}{2},+\infty\right)$ c) $x=\frac{3}{5}$

d) nierówność sprzeczna e) $x\in\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ f) $x\in\langle -1,2\rangle$

3.152. a) nierówność sprzeczna b) $x\in\boldsymbol{R}$ c) $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle 2,+\infty)$ d) $x=2{,}5$

e) $x\in(0,2)$ f) $x\in\boldsymbol{R}-\left\{\frac{2}{5}\right\}$

3.153. a) $x\in(-\infty,3\rangle\cup\left\langle 3\frac{1}{2},+\infty\right)$ b) $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ c) $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{8},+\infty\right)$

d) $x\in\left\langle -3,\frac{9}{19}\right\rangle$ e) $x=-5$ f) nierówność sprzeczna

3.154. a) $x=3$ b) nierówność sprzeczna c) $x\in\boldsymbol{R}$ d) $x\in(0,10)$ e) $x\in\langle -2,3\rangle$ f) nierówność sprzeczna

3.155. a) $x\in(-1,4)$ b) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(5,+\infty)$ c) $x\in\left\langle -\frac{2}{3},4\right\rangle$ d) $x\in\{-3\}$ e) $x\in\boldsymbol{R}$

f) nierówność sprzeczna

3.156. a) $x \in (-\infty, 2) \cup (11, +\infty)$ b) $x \in \left\langle -3\frac{1}{2}, 1 \right\rangle$ c) $x \in (-\infty, -29\rangle \cup \langle 1, +\infty)$
d) $x \in R - \{2\}$
3.157. a) $x \in \langle 1, 4\rangle$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 0, +\infty)$ d) $x \in R$
e) $x \in \langle -4, 1\rangle$ f) $x \in R - \{3\}$
3.159. $a = -8$
3.160. $a = -2\frac{2}{5}$
3.161. $a = -1\frac{4}{5}$
3.162. $A = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 5, +\infty)$; $B = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$; $A \cap B = (-\infty, -4) \cup \langle 5, +\infty)$;
$A \cup B = R$; $B - A = (1, 5)$
3.163. $A = \langle 0, 4\rangle$; $B = \{-2, -1, 0, 1\}$; $A \cup B = \{-2, -1\} \cup \langle 0, 4\rangle$; $A \cap B = \{0, 1\}$
3.164. a) $D = R$ b) $D = \langle 0, 2\rangle$ c) $D = (-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ d) $D = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
e) $D = (-3, 1)$ f) $D = R - \left\{\frac{4}{5}\right\}$
3.165. a) $m \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 5, +\infty)$ b) $m \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ c) $m \in (-1, 1) \cup (2, 4)$
d) $m \in \langle -4, -3\rangle \cup \langle -2, -1\rangle$
3.166. a) $m \in \langle -4, 4\rangle$ b) $m = -6$ c) $m \in (-3, 5)$ d) $m \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

3.167. 16 i 12 lub –16 i –12
3.168. –12, –10, –8 lub 8, 10, 12
3.169. –9, –7, –5 lub 5, 7, 9
3.170. 354
3.171. 23 lub 32
3.172. 141.
3.173. 18
3.174. 6
3.175. 5 klas
3.176. 30 m
3.177. 0,54 m^2, 0,96 m^2
3.178. 2,5 cm
3.179. 0,6 km i 0,8 km
3.180. $p = 30$
3.181. 32 cm i 32 cm lub $41\frac{1}{7}$ cm i $22\frac{6}{7}$ cm
3.182. w I beczce: 120 litrów w cenie 20 zł za litr, w II beczce: 80 litrów w cenie 30 zł za litr

3.183. tak, 25 lat
3.184. 5 i 1 lub 6 i 2
3.185. a) $P(a) = \frac{5}{4}a^2 + a$, $a \in (0, +\infty)$ b) $a = 1{,}2$ c) $a \in (4, 6\rangle$
3.186. 63, 54, 45, 36, 27
3.187. sześć
3.188. 1 m
3.189. 3 cm, 4 cm
3.190. $4\frac{8}{13}$

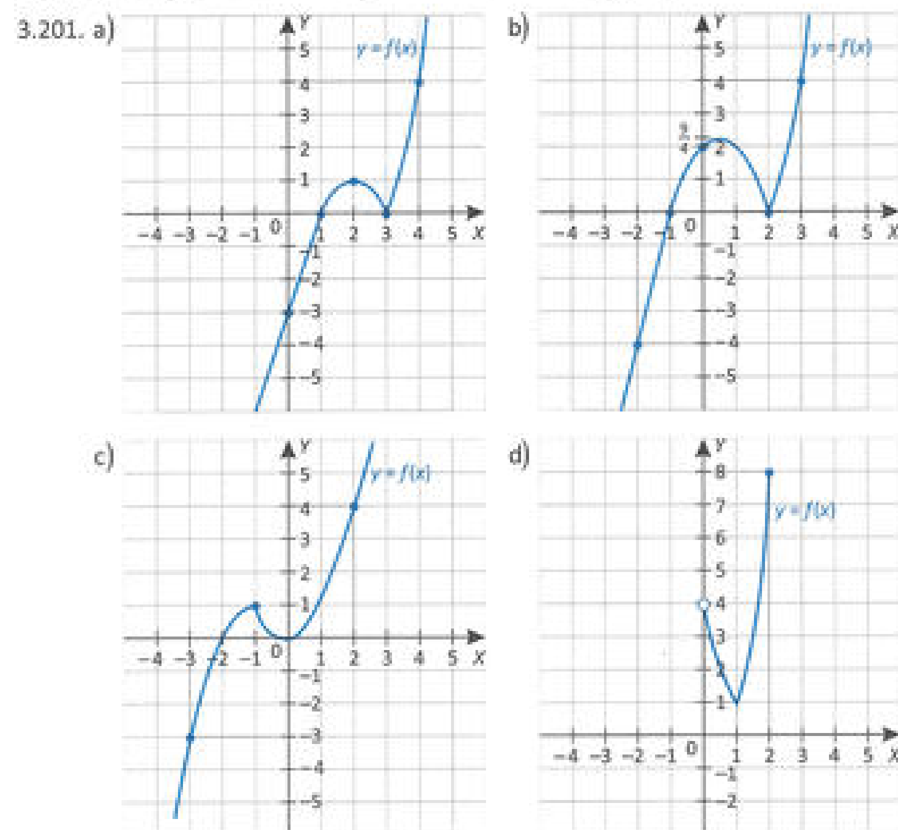
Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego

3.191. a) $x = -8$ b) $x = 4$ c) $x = -\frac{1}{3}$ d) $x = 7$ e) $x \in \{3, 4\}$ f) $x = \frac{1}{2}$
3.192. a) $x = -3$ b) $x = 1$ c) $x = \sqrt{2}$ d) równanie sprzeczne e) $x \in \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$
f) $x \in \{-1, 1\}$
3.193. a) $x = 0$ b) $x = 4$ c) $x \in \{7, 8\}$ d) równanie sprzeczne e) $x = -1$
f) $x \in \{-2, 2\}$
3.194. a) $x \in \{2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\}$; *wskazówka:* równanie doprowadź do postaci:
$x^2 - 4x + 4\sqrt{x^2 - 4x} + 4 = 0$ i podstaw $t = \sqrt{x^2 - 4x}$
b) $x \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$; *wskazówka:* podstaw $t = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; wówczas $x^2 - 4x = t^2 - 3$
c) $x \in \left\{-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}\right\}$ d) $x \in \left\{\frac{5 - \sqrt{145}}{2}, \frac{5 - \sqrt{65}}{2}, \frac{5 + \sqrt{65}}{2}, \frac{5 + \sqrt{145}}{2}\right\}$
3.195. a) $x = 2$ b) $x \in \{-1, 3\}$ c) $x = 4$ d) $x \in \{2, 34\}$ e) $x \in \{2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}\}$
f) $x = 4$
3.196. a) $x \in \langle 2, 6)$ b) $x \in \langle -3, 6)$ c) $x \in (-8, -1)$ d) $x \in \langle -10, -9) \cup (-1, +\infty)$
e) $x \in (-\infty, 1\rangle$ f) $x \in \langle 1, \sqrt{5})$
3.197. a) $x \in (-\infty, 0\rangle$ b) $x \in \left\langle \frac{3\sqrt{2}}{2}, 3 \right\rangle$ c) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup (1, +\infty)$
d) $x \in \langle 3, +\infty)$ e) $x \in \langle 1, 2)$ f) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
3.198. a) $x \in \langle 1, 2)$ b) $x \in \left\langle 4, 4\frac{9}{16}\right)$ c) $x \in \langle -17, -8) \cup (8, 17\rangle$ d) $x \in \left(2\frac{2}{3}, 3\right)$
e) nierówność sprzeczna f) $x \in \langle -4, 4\rangle$
3.199. a) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \{1\}$ b) $x \in \langle 3, +\infty)$ c) $x \in \langle -10, -6) \cup (6, 10\rangle$
d) $x \in \langle -\sqrt{6}, 2)$ e) $x \in (4, 5)$ f) $x \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$

3.200. a) $x \in \langle 3, 8\rangle$ *wskazówka:* podstaw $t = \sqrt{x+1}$; wówczas $t^2 = x + 1$ oraz $5+x-4\sqrt{x+1} = (x+1)-4\sqrt{x+1} = t^2-4t+4 = (t-2)^2$; analogicznie $10+x-6\sqrt{x+1} = (x+1)-6\sqrt{x+1}+9 = t^2-6t+9 = (t-3)^2$; otrzymujemy równanie $|t-2|+|t-3| = 1$, skąd $t \in \langle 2, 3\rangle$ b) $x \in \langle 5, 10\rangle$ c) $x \in \langle 8, +\infty)$ d) równanie sprzeczne

Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną

3.201. a) b) c) d)



Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

3.211. a) $x \in \{-1, 3, 7\}$ b) $x \in \{-5, -1, 1, 5\}$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \{-6, 2\}$ e) $x \in \left\{-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ f) $x \in \{-1-\sqrt{17}, -2, 0, -1+\sqrt{17}\}$

3.212. a) $x \in \{-3, 3\}$ b) $x \in \{0, 2, 4, 6\}$ c) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ d) $x = 4$ e) $x \in \{-1, 2\}$ f) $x \in \boldsymbol{R}$

3.213. a) $x \in \{-2, 0\}$ b) równanie sprzeczne c) $x \in \{-3, 0, 2, 5\}$ d) $x \in \{-2, 2\}$ e) $x \in \{-5, 0, 3\}$ f) $x \in \{-1, 1, 3, 5\}$

3.214. a) $x \in \{-8, -5, -2\}$ b) $x \in \{-2, 2\}$ c) $x \in \left\{1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right\}$ d) $x \in \{-3, -2, 0, 1\}$ e) $x \in \{0, \sqrt{2}\}$ f) $x \in \{-1, 2\sqrt{2}-1\}$

3.215. a) $x \in \{-3, -1\}$ b) $x \in \{0, 4, 8\}$ c) $x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$ d) $x \in \{-1, 4\}$ e) $x \in \langle -3, 3\rangle$ f) $x = -1$

3.216. a) $x \in \{1-\sqrt{3}, 2-\sqrt{2}\}$ b) równanie sprzeczne c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x \in \{-5, -2, 0, 3, 5, 8\}$ e) $x \in \langle -\sqrt{5}, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \sqrt{5}\rangle$ f) $x \in \{1, 3\}$

3.217. a) $x \in \langle -3, -2\rangle \cup \langle -1, 0\rangle$ b) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -4) \cup (-3, 3) \cup (4, +\infty)$ d) $x \in (0, 8)$ e) $x \in (-1, 3)$ f) $x \in (-11, -2) \cup (-2, 7)$

3.218. a) $x \in \langle -2, 2\rangle$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \{0\} \cup \langle 5, +\infty)$ d) $x \in (-4, 4)$ e) $x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 0, +\infty)$ f) $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \{0\} \cup \langle 4, +\infty)$

3.219. a) $x \in \langle -5, -2\rangle \cup \langle 2, 5\rangle$ b) $x \in (-3, 0) \cup (0, 3)$ c) $x \in (-2, 0) \cup (1, 3)$ d) $x \in \boldsymbol{R}$ e) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -5, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ f) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

3.220. a) $x \in (3-3\sqrt{2}, 3) \cup (3, 3+3\sqrt{2})$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (3, +\infty)$ c) $x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$ d) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 5, +\infty)$ e) $x \in \langle -2, -1\rangle \cup \langle 3, 4\rangle$ f) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Wzory Viete'a

3.221. a) ujemne b) jedno dodatnie, drugie ujemne c) dodatnie d) ujemne

3.222. a) $-3, -2$ b) $-2, 4$ c) $1, 7$ d) $2, 10$ e) $-5, 1$ f) $-9, 3$

3.223. a) $b = 1{,}5$; $c = -2{,}5$ b) $a = -2$; $c = 12$ c) $a = 2$; $b = -20$ d) $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$

3.224. a) $a > 0, b < 0, c > 0$ b) $a < 0, b > 0, c < 0$ c) $a > 0, b > 0, c > 0$ d) $a < 0, b < 0, c < 0$ e) $a > 0, b < 0, c > 0$ f) $a < 0, b < 0, c < 0$

3.225. $(x_1 = 1, x_2 = 5, p = -12)$ lub $(x_1 = -1, x_2 = -5, p = 12)$

3.226. $(x \in \{0, 3\}, q = 0)$ lub $(x \in \{1, 2\}, q = 4)$

3.227. a) $\frac{1}{12}$ b) $1\frac{1}{12}$

3.228. a) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ b) $2\frac{1}{8}$

3.229. $\frac{16\sqrt{2}-10}{5}$

3.232. $p = -4\frac{1}{4}$; $q = -3\frac{3}{4}$

3.233. $(p = 15 \text{ i } q = -11)$ lub $(p = 1 \text{ i } q = 3)$
3.234. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$
3.235. $f(x) = -(x-2)^2 + 9$
3.236. $f(x) = -\frac{1}{4}(x-4)(x+3)$
3.237. $f(x) = \frac{-6}{11}x^2 + \frac{18}{11}x - \frac{6}{11}$ albo $f(x) = 6x^2 + 18x + 6$
3.238. a) $x^2 - 2x - 6 = 0$ b) $x^2 - 5x - 3 = 0$ c) $2x^2 + 10x - 1 = 0$ d) $x^2 - 2\sqrt{10}x + 4 = 0$ lub $x^2 + 2\sqrt{10}x + 4 = 0$ e) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ lub $2x^2 + 5x + 2 = 0$ lub $2x^2 - 3x - 2 = 0$ lub $2x^2 + 3x - 2 = 0$ f) $x^2 - 3x + 1 = 0$ lub $x^2 + 3x + 1 = 0$ lub $x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$ lub $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$
3.239. $c = -1$; *wskazówka:* Skorzystaj z zależności $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ i oblicz x_1x_2.
3.240. *wskazówka:* Uzasadnij, że jeśli $b > 1$, to $\Delta > 0$; następnie oblicz $|x_1 - x_2|^2$.
3.241. *wskazówka:* Ponieważ $\Delta = a^2 + 8 > 0$, więc funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
$(|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 \cdot x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2|x_1 \cdot x_2|$

Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

3.242. a) $m \in \mathbb{R} - \{2\}$ b) $m \in (-3, -2) \cup (-2, -1)$
3.243. a) $k \in \langle 1, 3)$ b) $k = 3$ lub $k = 4$ c) $k \in \left\langle -1, 1\frac{2}{3} \right\rangle$ d) $k \in (-\infty, 0\rangle \cup \{1\} \cup \langle 2, +\infty)$
3.244. a) $g(p) = \begin{cases} 2, \text{ jeśli } p \in \left(-\infty, -3\frac{1}{3}\right) \cup (1, 5) \cup (5, +\infty) \\ 1, \text{ jeśli } p \in \left\{-3\frac{1}{3}, 1, 5\right\} \\ 0, \text{ jeśli } p \in \left(-3\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases}$

b) $g(p) = \begin{cases} 2, \text{ jeśli } p \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ 1, \text{ jeśli } p \in \left\{-3, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\} \\ 0, \text{ jeśli } p \in \left(-3, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

3.245. a) $m \in (-36, 0)$ b) $m \in \langle -7, 1\rangle$ c) $m \in \left(\frac{-\sqrt{55}}{2}, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$ d) $m \in (-\infty, -2\rangle$

3.246. a) $k \in (0, 1\rangle$ b) $k \in \left(-\infty, -4\frac{2}{3}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty)$
3.247. $k \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right\rangle$
3.250 a) $a \in \left(-\infty, \frac{5}{9}\right)$ b) $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
3.251. a) $c \in (\sqrt{2}, 2)$ b) $c \in \left(3, 3\frac{1}{2}\right\rangle$
3.252. a) $m \in (2, 3)$ b) $m \in \left\langle \frac{3}{4}, +\infty\right)$
3.253. a) $k \in \left\langle -1\frac{3}{5}, 0\right) \cup (2, +\infty)$ b) $k \in (-7, 1)$
3.254. $k = -1$
3.255. $k = -64$
3.256. $p = -3{,}2$ lub $p = 4{,}8$
3.257. $p \in \left(0, 2\frac{1}{2}\right)$
3.258. a) $m = 1$ b) $m = 3$
3.259. $k \in \langle -5, -1) \cup (3, 4\rangle$
3.262. $p \in \langle -6, -3) \cup (1, 4\rangle$
3.263. $k = -4\frac{1}{3}$; *wskazówka:* Lewą stronę równości doprowadź do postaci $3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2$.
3.264. $k \in \langle -1, 0)$
3.265. $a \in \left(1\frac{2}{9}, +\infty\right)$
3.266. $p \in \left(0, \frac{4-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{2}, 4\right)$
3.267. a) $x \in \left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$ b) $k \in \left(-1\frac{1}{3}, 0\right\rangle \cup \langle 4, +\infty)$
3.268. $k = -15$; *wskazówka:* Zauważ, że $x_1 + x_2 = 2$, więc para (x_1, x_2) jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 7x_2 - 4x_1 = 47 \end{cases}$. Ponadto $k = x_1 \cdot x_2$; sprawdź, że dla wyznaczonej liczby k wyróżnik jest dodatni.
3.269. $a = 4$; *wskazówka:* Para (x_1, x_2) spełnia układ równań $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2a+1 \end{cases}$, skąd $x_1 = \frac{4a+2}{3}$, $x_2 = \frac{2a+1}{3}$. Ponieważ $x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2$, więc liczba a jest rozwiązaniem

równania $\frac{4a+2}{3}\cdot\frac{2a+1}{3}=a^2+2$; sprawdź, że wówczas $\Delta > 0$.

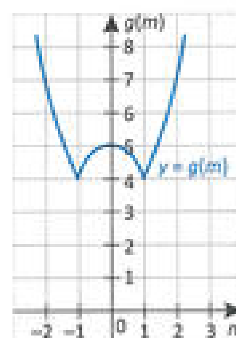
3.270. a) $x=\sqrt{2}$ b) $m\in\left\langle 2\sqrt{2}, 3\frac{2}{3}\right)$

3.271. $m \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

3.272. $m \in (1, 3)$

3.273. a) $x\in\left(0, 3\frac{1}{3}\right)$ b) $p\in\left(0, \frac{1}{3}\right)$

3.274. $g(m)=\begin{cases} m^2+3, \text{ jeśli } m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ -m^2+5, \text{ jeśli } m\in\langle -1, 1\rangle \end{cases}$



wskazówka: Zauważ, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji f są skierowane do góry, więc dla x_w funkcja f przyjmuje tylko wartość najmniejszą. Zatem w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ funkcja f przyjmuje największą wartość równą: • $f(1)$, gdy $f(1) \geq f(-1)$ lub • $f(-1)$, gdy $f(-1) < f(1)$.

3.275. $g(k)=\begin{cases} k+4, \text{ jeśli } k\in(-\infty,-4) \\ -0{,}25k^2-k, \text{ jeśli } k\in\langle -4, 0\rangle \\ -k, \text{ jeśli } k\in(0,+\infty) \end{cases}$

wskazówka: W zbiorze $\mathbf{R}$ funkcja f dla x_w, gdzie $x_w=\frac{-k}{2}$, przyjmuje wartość najmniejszą, równą $-0{,}25k^2-k$. Jeśli $x_w \in \langle 0, 2\rangle$, czyli gdy $k \in \langle -4, 0\rangle$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $\langle 0, 2\rangle$ najmniejszą wartość równą: $-0{,}25k^2-k$. Jeśli $k \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, to najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 0, 2\rangle$ jest liczba $f(0)$, gdy $f(0) \leq f(2)$, albo liczba $f(2)$, gdy $f(2) < f(0)$.

3.276. $m\in\left\langle -\frac{1}{4}, 2\right)$

3.277. $m\in\left(4\frac{3}{4}, +\infty\right)$

3.278. $m\in\left(-\infty, -3\sqrt{5}\right)\cup\left\langle 3\sqrt{5}, +\infty\right)$

3.279. *wskazówka:* Naszkicuj wykres odpowiedniej funkcji.

a) 0 rozwiązań, jeśli $m \in (-\infty, 0)$; dwa rozwiązania, jeśli $m \in \{0\} \cup (4, +\infty)$; trzy rozwiązania, jeśli $m = 4$; cztery rozwiązania, jeśli $m \in (0, 4)$

b) 0 rozwiązań, jeśli $m \in (-\infty, 0)$; dwa rozwiązania, jeśli $m \in \{0\} \cup (1, +\infty)$; trzy rozwiązania, jeśli $m = 1$; cztery rozwiązania, jeśli $m \in (0, 1)$

c) dwa rozwiązania, jeśli $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; trzy rozwiązania, jeśli $m \in \{-1, 1\}$; cztery rozwiązania, jeśli $m \in (-1, 1)$

d) 0 rozwiązań, jeśli $m \in (0, +\infty)$; dwa rozwiązania, jeśli $m \in (-\infty, -1) \cup \{0\}$; trzy rozwiązania, jeśli $m = -1$; cztery rozwiązania, jeśli $m \in (-1, 0)$

e) 0 rozwiązań, jeśli $m \in (-\infty, 3)$; jedno rozwiązanie, jeśli $m = 3$; dwa rozwiązania, jeśli $m \in (3, +\infty)$

f) 0 rozwiązań, jeśli $k\in\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$;

dwa rozwiązania, jeśli $k\in\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)\cup\left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$;

trzy rozwiązania, jeśli $k\in\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$;

cztery rozwiązania, jeśli $k\in\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$;

3.280. a) $a\in\left\{-1, -\frac{3}{4}\right\}$ b) $a\in\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

3.281. $m \in (-\infty, -10) \cup (6, +\infty)$

3.282. $c\in\left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

3.283. $k \in \langle 0, +\infty)$; *wskazówka:* Naszkicuj wykres funkcji $y = |1 - x^2|$ i zaznacz przedział $\langle -2, 2\rangle$ na osi OX; pamiętaj, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

3.284. $a \in (-1, 0\rangle \cup \langle 4, 5)$

3.285. $a \in (1, +\infty)$; *wskazówka:* Niech $t = |x|$; dane równanie ma cztery rozwiązania, jeśli równanie $t^2 - (a + 1)t + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

3.286. $p \in (-1, 0) \cup (3, 4)$

3.287. jeśli $p = -1$, to $x \in \{-8, 0, 8\}$; jeśli $p = 1$, to $x \in \{-4, 0, 4\}$; *wskazówka:* Niech $t = |x|$; dane równanie ma trzy rozwiązania, jeśli równanie $t^2 + 2(p - 3)t + p^2 - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania, z których jedno jest równe 0, a drugie jest dodatnie.

3.288. $m \in (-\infty, 2) \cup \{4\}$; *wskazówka:* Niech $t = |x|$; dane równanie ma dwa rozwiązania, jeśli równanie $2t^2 - mt + m - 2 = 0$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków albo tylko jedno rozwiązanie dodatnie.

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Odpowiedź	**D**	**A**	**C**	**C**	**B**	**A**	**A**	**D**	**A**	**A**	**B**	**B**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

13. a) $x = -10$ b) $x\in\left\{-\frac{3}{5}, 2\right\}$ c) $x\in\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ d) $x \in \{-1, 0, 3, 4\}$

14. a) $x\in\left\langle\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ b) $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ c) $x\in\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ d) $x \in \mathbf{R}$

15. najmniejsza wartość: 3; największa wartość: 21

16. a) $f(x)=-0{,}5(x-1)^2+4\frac{1}{2}$ b) $-2, 4$ c) $x \in \{-2, 2\}$

17. a) $a = c = -3$ b) $\langle 8, +\infty)$ c) $x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right\rangle$

18. a) postać iloczynowa: $f(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$; postać kanoniczna: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$
b) f rosnąca w przedziale $\langle -1, +\infty)$; f malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$ c) 0, 2

19. a) $x = -4$ b) $a=-\frac{1}{4}$, $b = -2$, $c = -3$ c) $g(x)=-\frac{1}{4}x^2-3\frac{1}{2}x-7\frac{1}{4}$

20. ojciec ma 64 lata, córka 36 lat.

21. 125.

22. co najmniej 11 osób

23. $2\sqrt{34}$ cm

24. a) $Z(x) = 86 \cdot x - K(x)$, skąd $Z(x) = -4x^2 + 88x - 84$, gdzie $x \in \{1, 2, \ldots, 18\}$; co najmniej 2 koszulki b) 11 koszulek; dzienny zysk wyniesie wówczas 400 zł

25. $\frac{50}{49}$ m, $\frac{48}{49}$ m

31. a) $x \in \{-1, 3\}$ b) $x \in \{-\sqrt{2}, 1-\sqrt{5}\}$ c) $x = 2$ d) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

32. $x \in (-\infty, -5) \cup (-4, -1) \cup (1, 4) \cup (5, +\infty)$

33. a) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -5, 5\rangle \cup \langle 7, +\infty)$ b) $x = 3$

34. a) $x = 1$ b) $x \in \langle 2, +\infty)$

35. $f(x)=\frac{1}{3}(x-3)(x-2)$

36. ($p = -1$ i $q = 3$) lub ($p = 3$ i $q = -1$)

37. ($c = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$) lub ($c = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$) lub ($c = 6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$)

39. $$f(k)=\begin{cases} 0, \text{ jeśli } k \in \left(-\frac{3}{5}, 1\right\rangle \\ 1, \text{ jeśli } k = -\frac{3}{5} \\ 2, \text{ jeśli } k \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

40. $m \in \langle -\sqrt{5}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{5}\rangle$

41. $m \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$

42. $p=2-\sqrt{17}$ lub $p=2+\sqrt{17}$

43. $p = -2$ lub $p = 8$

44. $a \in \left(1\frac{1}{3}, 2\right\rangle$

45. $k \in (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$

46. $a \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 1, +\infty)$

47. $a \in \left(1\frac{1}{3}, +\infty\right)$

48. $p \in (-\infty, -1) \cup \{3\}$

4. Geometria płaska – okręgi i koła

Powtórzenie wiadomości z geometrii z klasy 1.

4.1. 36°, 144°

4.2. a) 245° b) 220°

4.3. $|\sphericalangle ACB| = 94°$

4.4. $\beta = 143°$

4.5. a) 35°, 67°, 78° b) 52°, 75°, 53°

4.6. 51°

4.8. b) *wskazówka:* Poprowadź prostą AB i oblicz miarę kąta przyległego do kąta CBA.

4.9. a) $x = 2{,}4$ b) $x = 9$ c) $x = 4{,}5$ d) $x = 4{,}5$ e) $x = 12$ f) $x=10\frac{5}{7}$

4.10. a) $2\frac{2}{3}$ cm b) 8,4 dm c) 7 dm d) 9 cm

4.11. a) tak b) tak c) nie d) nie

4.12. a) $a \in (2, 6)$ b) $a \in (3, +\infty)$ c) $a \in \left(1\frac{1}{3}, 6\right)$

4.13. $c \in \{7, 11\}$

4.14. a) 9 b) 9

4.15. 6 cm, 9 cm, 12 cm

4.16. 7, 14, 21, $|AB| = 28$

4.17. 28°, 28°, 124°

4.19. a) $8+4\sqrt{3}$ b) $12+6\sqrt{3}$

4.20. a) $2\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm, 4 cm b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ cm

4.21. b) 18,9 cm

4.22. b) 37,6 cm

4.23. a) 9 cm, 12 cm, 15 cm b) 7,5 cm

4.24. a) rozwartokątny b) 8 cm, $9\frac{15}{17}$ cm, 16,8 cm

4.25. a) 12 cm b) $\frac{3\sqrt{97}}{2}$ cm c) 7,5 cm

4.26. a) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ b) $0{,}5\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$

4.27. a) 3 cm, 4 cm; *wskazówka:* Zauważ, że trójkąt jest prostokątny. Poprowadź ze środka przeciwprostokątnej odcinki prostopadłe do przyprostokątnych, wyznacz ich długość i skorzystaj z wniosku z twierdzenia Talesa b) 5 cm, $2\sqrt{13}$ cm, $\sqrt{73}$ cm

4.28. 15 cm, $\frac{3\sqrt{89}}{2}$ cm, $\frac{3\sqrt{89}}{2}$ cm

4.29. *wskazówka:* Poprowadź przez punkt D prostą, równoległą do półprostej $CE^{\rightarrow}$.

4.30. *wskazówka:* Wykaż, że $|\sphericalangle ADC| = 90°$. Następnie uzasadnij, że $\triangle ADC \equiv \triangle ADB$.

4.31. *wskazówka:* Wykaż, że $\triangle PDC \equiv \triangle ADB$.

4.32. 10 cm

4.33. o 20%

4.34. b) $\frac{5}{3}$

4.35. 60 cm

4.36. (2,5 cm, 7,5 cm) oraz (2 cm, 6 cm)

4.37. a) 6 cm; 3,6 cm; 3,6 cm b) 7,2 cm

4.38. 40 cm

4.39. 7,5 cm, 10 cm

4.40. b) nie

4.41. *wskazówka:* Wykaż, że $|\sphericalangle C_2CC_1| = \frac{|\sphericalangle A| + |\sphericalangle B|}{2}$.

4.43. *wskazówka:* Niech $|BC| = 2y$, $|AB| = 4x$; wyraź y w zależności od x.

Okrąg. Położenie prostej i okręgu

4.46. a) 3 cięciwy, 6 łuków b) 6 cięciw, 12 łuków

4.47. 3,5 cm

4.48. 7 cm

4.49. 30 cm

4.50. 26π cm

4.51. a) 10π cm b) 6 cm

4.52. a) 17% b) 64% c) 50% d) 12% e) 100% f) 28%

4.53. a) prosta k jest rozłączna z okręgiem o b) prosta k jest sieczną okręgu o c) prosta k jest sieczną okręgu o d) prosta k jest styczna do okręgu o

4.55. 34 cm

4.56. $|FC| = 12$ cm

4.57. a) 135° b) 120° c) 80° d) 39°

4.58. 2 cm

4.60. 20 cm; *wskazówka:* Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia Talesa.

4.61. a) $a \in \langle 3, +\infty)$; jeśli $a \in \langle 3, 7)$, to prosta jest sieczną okręgu; jeśli $a = 7$, to prosta jest styczna do okręgu; jeśli $a \in (7, +\infty)$, to prosta jest rozłączna z okręgiem

b) $a \in (0, 8\rangle$; jeśli $a \in (0, 4)$, to k jest rozłączna z okręgiem, jeśli $a = 4$, to prosta jest styczna do okręgu, jeśli $a \in (4, 8\rangle$, to prosta jest sieczną okręgu c) $a \in \langle -6, 0)$; jeśli $a \in \langle -6, -3)$, to prosta jest sieczną okręgu, jeśli $a = -3$, to prosta jest styczna do okręgu; jeśli $a \in (-3, 0)$, to prosta jest rozłączna z okręgiem

d) $a \in (1, +\infty)$; prosta jest rozłączna z okręgiem

Wzajemne położenie dwóch okręgów

4.62. a) okręgi styczne wewnętrznie b) okręgi styczne zewnętrznie c) okręgi się przecinają d) okręgi styczne wewnętrznie e) okręgi rozłączne wewnętrznie f) okręgi rozłączne zewnętrznie

4.63. a) 5 cm, 7 cm b) 3 cm, 9 cm

4.64. a) 3 cm, 6 cm b) 7 cm, 10 cm

4.65. 6 cm, 9 cm

4.66. trójkąt równoboczny o boku r

4.67. 12,5 cm

4.68. *wskazówka:* $R - r = 9$ oraz $15^2 = R^2 - r^2 = (R - r)(R + r) = 9 \cdot (R + r)$, teraz wystarczy rozwiązać układ równań $(R - r = 9 \wedge R + r = 25)$

4.69. a) $k \in \langle 0, +\infty)$; jeśli $k \in \langle 0, 1)$, to okręgi rozłączne wewnętrznie; jeśli $k = 1$, to okręgi styczne wewnętrznie; jeśli $k \in (1, 5)$, to okręgi się przecinają; jeśli $k = 5$, to okręgi styczne zewnętrznie; jeśli $k \in (5, +\infty)$, to okręgi rozłączne zewnętrznie

b) $k \in (1, +\infty)$; jeśli $k \in (1, 3)$, to okręgi rozłączne zewnętrznie; jeśli $k = 3$, to okręgi styczne zewnętrznie; jeśli $k \in (3, +\infty)$, to okręgi się przecinają c) $k \in (0, +\infty)$; jeśli $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, to okręgi rozłączne zewnętrznie; jeśli $k = \frac{1}{2}$, to okręgi styczne zewnętrznie; jeśli $k \in \left(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$, to okręgi się przecinają; jeśli $k = 3\frac{1}{2}$, to okręgi styczne wewnętrznie; jeśli $k \in \left(3\frac{1}{2}, +\infty\right)$, to okręgi rozłączne wewnętrznie

d) $k \in (-1, 5)$; jeśli $k \in \{1, 3\}$, to okręgi styczne wewnętrznie; jeśli $k \in (-1, 1) \cup (3, 5)$, to okręgi rozłączne wewnętrznie; jeśli $k \in (1, 3)$, to okręgi się przecinają

4.70. a) $m \in \{8, 14\}$ b) $m \in (8, 14)$

4.71. $a \in \left\langle 4, 4\frac{2}{3} \right\rangle$

4.72. 10 cm

4.73. 15

4.74. $|O_1O_2| = 3\sqrt{2}$

4.75. a) $4\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{10}$

4.76. *wskazówka:* Połącz środki trzech mniejszych okręgów i wyznacz wysokość tego trójkąta poprowadzoną na podstawę w zależności od r.

4.77. *wskazówka:* Poprowadź przez punkty O_1 i O_2 odcinki prostopadłe do odcinka AB.

Koła i kąty

4.78. a) $\alpha = 107°$ b) $\alpha = 61°$ c) $\alpha = 160°$ d) $\alpha = 76°$ e) $\alpha = 47°$ f) $\alpha = 34°$

4.79. a) $\alpha = 65°$ b) $\alpha = 105°$ c) 69° d) 77°

4.80. a) 60°, 65°, 55° b) 35°, 15°, 130° c) 40°, 70°, 70°

4.81. a) 40° b) 100° c) 55°

4.82. a) 90° b) 120° c) 225° d) 108° e) ok. 57° f) ok. 286°

4.83. a) 6π b) 12π c) 3π d) $\frac{14\pi}{3}$ e) $19{,}5\pi$

4.84. a) 20° b) 80° c) 120° d) 140°

4.85. $\frac{2}{3}$

4.86. $\widehat{BC} : \widehat{AC} : \widehat{AB} = 2:3:7$

4.87. 50°, 60°, 70°

4.91. *wskazówka:* Zauważ, że $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|$. Następnie zapisz kąt ACD jako sumę kątów ACB, BCD i skorzystaj z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.

4.92. *wskazówka:* Oblicz $|\sphericalangle ABO|$ i skorzystaj z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.

4.93. *wskazówka:* Oblicz miary kątów środkowych BO_1A oraz AO_2B, gdzie O_1 i O_2 są środkami danych okręgów i skorzystaj z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku.

4.94. *wskazówka:* Poprowadź dwusieczną jednego kąta; niech przecina ona okrąg w punkcie P. Wykaż, że punkt P należy do dwusiecznej drugiego kąta.

4.95. *wskazówka:* Połącz odcinkami punkt A z punktami przecięcia każdych dwóch okręgów, następnie wyraź powstałe przy wierzchołku A trzy kąty odpowiednio w zależności od α, β, γ.

4.96. *wskazówka:* Wyraź kąt CBA za pomocą kąta COA oraz kąt BCD za pomocą kąta BOD.

4.97. tak; *wskazówka:* Wykaż, że $|\sphericalangle ABD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOD|$ oraz $|\sphericalangle ACD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DOC|$.

Twierdzenie o stycznej i siecznej

4.98. 3 cm

4.99. 12 cm

4.100. 7 cm

4.101. $|CP| = 16$ cm

4.102. $|CD| = 10$ cm

4.103. a) $r = 7$ b) $|PE| = 16\sqrt{3}$

4.105. *wskazówka:* Niech $|PA| = 3x$, oraz $|PB| = y$; wówczas $|PC| = 5x$. Wyraź y w zależności od x.

4.106. $|AB| = |AC| = 6\sqrt{5}$ cm, $|AB| = 12$ cm; *wskazówka:* Niech $|CE| = |EB| = x$; wówczas $x \cdot x = 12 \cdot 3$

4.107. a) $r = 3$ b) $|CE| = 4$ cm, $|EB| = 6$ cm; *wskazówka:* Poprowadź promień OE i oblicz CE. Następnie zauważ, że $\triangle DBC \sim \triangle EOC$.

4.108. $|CD| = \frac{90}{\sqrt{13}}$, $|DB| = \frac{40}{\sqrt{13}}$; *wskazówka:* Oblicz wysokość CE trójkąta AOC oraz długość odcinka CB.

4.109. a) $R = 5$ b) $|AB| = 2\sqrt{5}$

4.110. $2\sqrt{14}$; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia o siecznej i stycznej do wyznaczenia długości cięciwy AQ, a następnie z twierdzenia o siecznych do obliczenia promienia większego okręgu.

4.111. *wskazówka:* Wykaż, że trójkąty ABD i DCA są równoramienne.

Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie

4.112. 3,15 cm

4.113. a) 9 cm b) $(31 + \sqrt{97})$ cm c) 12 cm d) $\frac{36\sqrt{97}}{97}$ cm

4.114. 24 cm

4.115. 5 : 4

4.116. 168 cm

4.117. 4 cm, 4 cm, $4\sqrt{3}$ cm

4.118. a) *wskazówka:* Niech środek S okręgu opisanego na trójkącie ABC należy do wysokości CD. Ponieważ przez punkt S można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do boku AB, więc wysokość CD zawiera się w symetralnej boku AB. Zatem symetralna boku AB przechodzi przez punkt C. Następnie wykaż, że $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$

b) *wskazówka:* Niech $|AB| = 2a$, $|CD| = 3x$. Wówczas $|CS| = |SB| = 2x$. Zastosuj twierdzenie Pitagorasa kolejno do trójkątów DBS i DBC.

4.119. a) środek okręgu jest środkiem najdłuższego boku b) na zewnątrz trójkąta c) na zewnątrz trójkąta d) wewnątrz trójkąta

4.120. $2\sqrt{3}$ cm

4.121. $6\sqrt{3}$ cm

4.122. a) $\sqrt{2}$ cm b) 12,5 cm c) 30,5 cm

4.123. 4 cm

4.124. 84,5 cm

4.125. a) $4\frac{1}{6}$ cm b) $8\frac{1}{3}$ cm, $6\frac{2}{3}$ cm, 5 cm

4.126. $8\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, 20

4.127. $|AB|:|BC|:|AC|=2:\sqrt{3}:1$ b) $|AB|:|BC|:|AC|=1:\sqrt{2}:1$

4.128. b) 6 cm

4.129. 12 cm, $9\frac{3}{8}$ cm

4.130. $8\frac{1}{3}$ cm

4.131. a) $13\frac{1}{48}$ cm b) $169\frac{3}{22}$ cm

4.132. $|AB| = 8$

4.133. 24 cm, 15 cm, 15 cm; *wskazówka:* Najpierw skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia długości ramienia. Następnie skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów do obliczenia wysokości trójkąta poprowadzonej na podstawę.

4.135. Trójkąt ABC jest rozwartokątny, bo $h < R$.

4.136. $h=6$, $d=\frac{\sqrt{10}}{3}$

4.137. a) 30 b) 17; *wskazówka:* Poprowadź symetralną ramienia i oznacz długości powstałych na boku równych odcinków przez x. Wówczas $\frac{8}{14\frac{2}{17}}=\frac{R}{2x}$, stąd $x=\frac{15R}{17}$.

Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt

4.138. $(40°, 40°, 100°)$ lub $(80°, 80°, 20°)$

4.139. 63°, 9°

4.140. I. 10°, 40°, 130° II. 50°, 50°, 80° III. 50°, 60°, 70° IV. 30°, 40°, 110° V. 30°, 70°, 80° VI. 10°, 60°, 110°

4.141. 50°, 50°, 80° lub 80°, 80°, 20°

4.142. 55°, 65°, 60°

4.143. 80°, 60°, 40°

4.144. 24 cm

4.145. 6 cm, 10 cm

4.146. a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) 2,5 cm

4.147. $24\sqrt{3}$ cm

4.148. a) $r=3\sqrt{2}-3$ b) $r=1$

4.149. 1 cm, 2 cm; 1 cm, 3 cm; 2 cm, 3 cm

4.150. a) 2 cm b) 3 cm c) 2 cm d) $(\sqrt{5}-1)$ cm

4.151. a) $2\sqrt{2}-2$ b) $\sqrt{2}+1$

4.153. 2 cm; *wskazówka:* Skorzystaj z własności opisanej w poprzednim zadaniu.

4.154. $R = 12{,}5$ cm, $r = 3$ cm

4.155. a) 1,5 cm b) 2,4 cm

4.156. a) $1\frac{1}{3}$ cm b) 5,25 cm

4.157. $|AB| = 48$ cm, $|AC| = |BC| = 30$ cm.

4.158. 10 cm; *wskazówka:* Niech O oznacza środek okręgu, D – punkt styczności okręgu z podstawą AB, E – punkt styczności z ramieniem BC. Zauważ, że trójkąt DBC jest podobny do trójkąta OEC w skali 2. Jeśli $|OC| = x$, to $|BC| = 2x$.

4.159. $2\frac{2}{3}$ cm, $3\frac{1}{3}$ cm

4.160. 9 cm, 3 cm

4.161. $6\frac{2}{3}$ cm lub 15 cm

4.162. a) $|AB| = 6$ b) $|AE|=4\frac{5}{7}$, $|BE|=1\frac{2}{7}$

4.163. a) 6 cm, 4 cm b) $5\frac{5}{11}$ cm, $4\frac{6}{11}$ cm

4.164. a) $8\frac{4}{7}$ cm, $6\frac{3}{7}$ cm b) 9 cm, 6 cm

4.165. a) $|CD|=2\sqrt{3}$ b) $R = 3$ c) $r=\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$

4.166. a) $\frac{60\sqrt{2}}{7}$ b) $\frac{20\sqrt{10}}{3}$ *wskazówka:* Zauważ, że trójkąt jest prostokątny.

4.167. a) 4,2 cm, 5,6 cm b) $2{,}4\sqrt{2}$ cm

4.168. a) $|AD|=\frac{48\sqrt{5}}{11}$ b) $|CE| = 8$

4.169. a) $|AC| = |BC| = 15$ cm b) $|BP| = 8\frac{2}{11}$ cm, $|PC| = 6\frac{9}{11}$ cm c) $|AP| = \frac{72\sqrt{5}}{11}$

4.171. a) $|AB| = 20$ cm; *wskazówka:* Niech $E \in AB$ oraz $PE \perp AB$; wówczas $\frac{|PB|}{|CB|} = \frac{|PE|}{|CD|} = \frac{4}{9}$, stąd $|PB| : |CP| = 4 : 5$. Następnie skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie. b) $|AC| = \sqrt{745}$ cm

4.172. b) $r = 3$, $R = 6\frac{1}{4}$, $|OS| = 1\frac{1}{4}$

4.173. a) $R = 12{,}5$ cm, b) 24 cm; *wskazówka:* Niech D oznacza spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka C; wówczas $\triangle DBC \sim \triangle MSC$.

4.174. a) $r = 5$ b) $|BP| = 7{,}5$, $|PC| = 12$ c) $\frac{27\sqrt{10}}{20}$

Test sprawdzający do rozdziału 4.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Odpowiedź	B	D	C	B	A	D	D	B	D	C	A	B	D	C	C

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

16. 6 cm

17. a) $\alpha = 39°$ b) $\alpha = 50°$

18. $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ \approx 77°$

19. b) $|\sphericalangle A| = 39°$, $|\sphericalangle B| = 25°$, $|\sphericalangle C| = 116°$

21. a) $r = 3$ cm, $R = 7$ cm b) $|AB| = 4{,}5$ cm

22. Okręgi istnieją, jeśli $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ a) okręgi są styczne zewnętrznie, jeśli $m = 3$; promienie okręgów: 5 i 9, okręgi są styczne wewnętrznie, jeśli $m = 13$; promienie okręgów: 25 i 39 b) $m \in (3, 13)$

23. 18 cm

25. 1 : 3

26. a) $|DE| = 3{,}75$ cm b) $|CF| = 3\sqrt{5}$ cm

27. a) 12 cm, 8 cm; *wskazówka:* Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
b) $11\frac{3}{7}$ cm, $8\frac{4}{7}$ cm

28. a) 10 b) $R = 7\frac{1}{24}$ c) $r = 3\frac{1}{3}$

29. a) 30 cm, 40 cm, 50 cm b) 10 cm

30. a) $31\frac{7}{8}$, $36\frac{1}{8}$ b) $R = 18\frac{1}{16}$ c) $r = 6\frac{3}{8}$

31. $|O_1P| = 7{,}5$ cm, $|PO_2| = 5$ cm

32. a) $r_1 = 6$, $r_2 = 2$ b) $|O_1A| = 12$

33. Warunki zadania są spełnione, gdy $m \in \langle 0, 5)$. Jeśli $m \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$, to okręgi są styczne wewnętrznie; jeśli $m \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$, to okręgi się przecinają; jeśli $m \in \left\langle 0, \frac{2}{3}\right) \cup (2, 5)$, to okręgi są rozłączne wewnętrznie.

34. *wskazówka:* Oblicz kolejno $|AC|$, wysokość CD trójkąta AOC oraz $|CB|$. Następnie skorzystaj z twierdzenia o siecznych.

35. *wskazówka:* Wykaż, że cięciwy CA i DA są średnicami tych okręgów.

36. $|AB| = 26\frac{2}{3}$ cm, $|AC| = |BC| = 28\frac{1}{3}$ cm

37. a) $R = 3\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $1{,}8\sqrt{5}$

38. 4 cm

39. 4,8 cm

40. *wskazówka:* Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta oraz $a = 5x$. Mamy $b : c = 2 : 3$ oraz $c^2 = b^2 + (5x)^2$, stąd $b = 2\sqrt{5}x$, $c = 3\sqrt{5}x$.

5. Trygonometria

Trygonometria kąta ostrego – powtórzenie wiadomości z klasy 1.

5.1. a) 33,5 cm b) 38,5 cm c) 27 cm d) 45,5 cm e) 23,5 cm f) 27,5 cm

5.2. a) 3 b) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

5.3. a) $\frac{1}{4}$ b) $-2\sqrt{3}$ c) $-30 + 5\sqrt{6}$

5.4. a) $\sqrt{3}$ cm b) $\sqrt{2}$ cm c) 1 cm

5.5. e) 60° f) 45° g) 30° h) 45°

5.6. a) $|\sphericalangle A| = 45°$, $|\sphericalangle B| = 30°$, $|\sphericalangle C| = 105°$ b) $|\sphericalangle A| = 60°$, $|\sphericalangle B| = 30°$, $|\sphericalangle C| = 90°$

5.8. a) $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{7}{24}$, $\text{ctg}\,\alpha = 3\frac{3}{7}$ b) $\sin\alpha = \frac{11}{61}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{11}{60}$, $\text{ctg}\,\alpha = 5\frac{5}{11}$
c) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\text{ctg}\,\alpha = \frac{5}{12}$ d) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\text{tg}\,\alpha = 3$

5.9. *wskazówka:* Wykaż, że $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta płaskiego

5.13. a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\text{ctg}\alpha = 2\frac{2}{5}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\text{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\text{ctg}\alpha = -1\frac{7}{8}$

e) $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$, $\text{tg}\alpha$ – nie istnieje, $\text{ctg}\alpha = 0$

f) $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$, $\text{tg}\alpha = 0$, $\text{ctg}\alpha$ – nie istnieje

5.14. a) $y = -4$ b) $x = -3$ c) $x = 7{,}5$ d) $y = -1$

5.15. a) $P(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ b) $P(-6, 3\sqrt{5})$ c) $P(-6, -8)$ d) $P(3, -\sqrt{3})$

5.16. a) $P(-2, -4)$ b) $P(-1, 3)$ c) $P(12, -9)$ d) $P(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

5.17. a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = 0°$ lub $\alpha = 180°$ c) $\alpha = 90°$ lub $\alpha = 270°$

5.18. a) $\sin 210° = \frac{-1}{2}$, $\cos 210° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\,210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg}\,210° = \sqrt{3}$

b) $\sin 240° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240° = \frac{-1}{2}$, $\text{tg}\,240° = \sqrt{3}$, $\text{ctg}\,240° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg}\,135° = -1$, $\text{ctg}\,135° = -1$

d) $\sin 330° = \frac{-1}{2}$, $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\,330° = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg}\,330° = -\sqrt{3}$

5.19. a) III ćw. b) IV ćw. c) I ćw. lub III ćw. d) II ćw. e) IV ćw. f) IV ćw.

5.20. a) wartość ujemną b) wartość dodatnią c) wartość ujemną d) wartość dodatnią

5.21. a) $P(-3, -2)$ b) $P\left(\frac{-3\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ c) $P\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ d) $P\left(1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$

5.22. a) *wskazówka:* Skorzystaj z definicji funkcji trygonometrycznych i ustal, że końcowe ramię kąta α zawiera się w prostej $y = x$.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

5.25. a) $\cos\alpha = -0{,}6$, $\text{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\text{tg}\alpha = -\sqrt{15}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$, $\text{ctg}\alpha = -3$

d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$

5.26. a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\text{ctg}\alpha = 2$ b) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\text{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$, $\text{ctg}\alpha = -3\frac{3}{7}$

c) $\left(\cos\alpha = \frac{2}{3}, \text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ lub $\left(\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \text{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ctg}\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

d) $\sin\alpha = \frac{60}{61}$ $\cos\alpha = -\frac{11}{61}$ $\text{tg}\alpha = -5\frac{5}{11}$

5.27. a) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$ b) $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\text{tg}\alpha = \frac{15}{8}$

c) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$ d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\text{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5.28. a) $\left(\sin\alpha = \frac{12}{13}, \text{tg}\alpha = \frac{12}{5}, \text{ctg}\alpha = \frac{5}{12}\right)$ lub $\left(\sin\alpha = -\frac{12}{13}, \text{tg}\alpha = -\frac{12}{5}, \text{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}\right)$

b) $\left(\cos\alpha = -\frac{11}{61}, \text{tg}\alpha = \frac{60}{11}, \text{ctg}\alpha = \frac{11}{60}\right)$ lub $\left(\cos\alpha = \frac{11}{61}, \text{tg}\alpha = -\frac{60}{11}, \text{ctg}\alpha = -\frac{11}{60}\right)$

c) $\left(\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{tg}\alpha = \frac{1}{3}\right)$ lub $\left(\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{tg}\alpha = \frac{1}{3}\right)$

d) $\left(\cos\alpha = \frac{45}{53}, \sin\alpha = \frac{28}{53}, \text{tg}\alpha = \frac{28}{45}\right)$ lub $\left(\cos\alpha = -\frac{45}{53}, \sin\alpha = -\frac{28}{53}, \text{tg}\alpha = \frac{28}{45}\right)$

5.29. a) $\frac{15}{16}$ b) 6

5.30. a) $-1{,}09$ b) $0{,}5 - \sqrt{3}$ c) $-11\frac{1}{2}$ d) $-1\frac{16}{21}$

5.31. a) $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\text{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ c) $\text{tg}\alpha = 1$ d) $\text{ctg}\alpha = -2$

5.34. a) $-\frac{60}{169}$ b) $\frac{17}{13}$ c) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

5.35. a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{8}$

5.36. a) 14 b) 194 c) 12

5.39. a) nie b) tak, do IV ćw. c) tak, do II ćw. d) nie

5.40. a) nie b) tak c) tak d) nie

5.41. a) nie b) tak c) tak d) tak

5.42. a) $\cos\alpha = -\sqrt{1-b^2}$ $\text{tg}\alpha = \frac{-b}{\sqrt{1-b^2}}$ $\text{ctg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-b^2}}{b}$

b) $\sin\alpha = -\sqrt{1-a^2}$ $\text{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-a^2}}{a}$ $\text{ctg}\alpha = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$

5.43. *wskazówka:* Podaj przykład kąta α, dla którego L ≠ P.

5.44. *wskazówka:* Podaj przykład kąta α, dla którego L ≠ P.

5.46. b) *wskazówka:* Rozpatrz dwa przypadki: $\sin\alpha > \cos\alpha$ oraz $\sin\alpha < \cos\alpha$.

5.47. a) *wskazówka:* Skorzystaj z zależności: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \geq 0$ oraz $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 \geq 0$.

b) *wskazówka:* I sposób – z punktu a) wynika, że $0 \leq \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \leq \frac{1}{4}$, zatem $0 \leq \sin^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right) \leq \frac{1}{4}$. Teraz wyrażenie $\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)$ doprowadź do postaci $-\sin^4\alpha - \cos^2\alpha + 1$. II sposób – zastąp $\cos^2\alpha$ wyrażeniem $1 - \sin^2\alpha$; następnie podstaw $t = \sin^2\alpha$, gdzie $t \in \langle 0, 1\rangle$ i oblicz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $f(t)=t^2-t+\frac{1}{4}$ w przedziale $\langle 0, 1\rangle$.

5.48. *wskazówka:* Oblicz miejsca zerowe x_1, x_2; następnie wykaż, że $x_1^2+x_2^2=1$.

5.49. *wskazówka:* Oblicz miejsca zerowe x_1, x_2; następnie wykaż, że $x_1^2+x_2^2=1$.

5.50. $a \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$; jeśli $a=\sqrt{2}$, to $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=45°$; jeśli $a=-\sqrt{2}$, to $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 225°$

5.51. $a = 6$; wówczas $x=\frac{4-\sqrt{2}}{6} \vee x=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$; końcowe ramię znajduje się w I ćwiartce

Wybrane wzory redukcyjne

5.52. a) $-1\frac{3}{4}$ b) $-2\frac{1}{2}$ c) $\frac{7-4\sqrt{3}}{12}$ d) $2\frac{1}{2}$

5.53. $a=-2$, $b=\frac{11+4\sqrt{6}}{12}$, $c=-\frac{1}{4}$, $d=\frac{1}{2}$. Liczby wymierne to: a, c, d.

5.54. a) $x > y$ b) $x = y$ c) $x < y$ d) $x < y$

5.55. a) 3 b) 1 c) 0 d) 2 e) 3

5.56. a) 1 b) 2 c) −2 d) $1\frac{1}{4}$ e) −2

5.57. a) −1 b) 0 c) 1 d) 2

5.58. a) $\alpha + \beta = 120°$; $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{-1}{2}$, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=-\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ c) *wskazówka:* $\gamma = 150°$, więc $\alpha + \beta = 30°$ d) *wskazówka:* $\gamma = 135°$

5.59. a) 210° b) 180° c) 135° d) 330° e) 315° f) 120°

Kąt skierowany. Miara łukowa kąta

5.65. a) 97° b) 230° c) 130° d) 200° e) 270° f) 150°

5.66. a) 6 b) 2 c) $\frac{2\pi}{15}$ d) $\frac{4\pi}{3}$ e) 2 f) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

5.67. a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{9}$ c) $-\frac{\pi}{90}$ d) $-\frac{3}{5}\pi$ e) $\frac{7}{5}\pi$ f) $-\frac{5}{3}\pi$ g) $\frac{3}{4}\pi$ h) $-\frac{7}{6}\pi$

5.68. a) 126° b) 450° c) −40° d) −30° e) 120° f) −1230° g) 495° h) 780°

5.69. a) $\frac{5}{12}\pi$ b) $\frac{7}{18}\pi$ c) $\frac{17}{18}\pi$ d) $\frac{11}{24}\pi$ e) $\frac{\pi}{36}$ f) $\frac{\pi}{6}$

5.70. a) 2^{20} b) 8^{10} c) 5^{05} d) 3^{45} e) 10^{06} f) 1^{01}

5.71. a) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ d) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5.72. a) $-1\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) −1

5.73. a) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ b) $1\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{4}$

5.74. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) 0 d) −2

5.75. a) I. $\alpha=\frac{4\pi}{3}$; $\cos\alpha=\frac{-1}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

II. $\alpha=\frac{5\pi}{3}$; $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=-\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) I. $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=1$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=1$

II. $\alpha=\frac{7\pi}{4}$; $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=-1$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=-1$

c) I. $\alpha=\frac{\pi}{6}$; $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{3}$

II. $\alpha=\frac{7\pi}{6}$; $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{3}$

d) I. $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=-1$

II. $\alpha=\frac{7\pi}{4}$; $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=-1$

e) I. $\alpha=0$; $\cos\alpha=1$, $\mathrm{tg}\,\alpha=0$, cotangens α nie istnieje II. $\alpha=\pi$; $\cos\alpha=-1$, $\mathrm{tg}\,\alpha=0$, cotangens α nie istnieje

f) I. $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$

II. $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

5.76. a) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ b) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ c) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ d) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$

5.77. a) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ b) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ d) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

5.78. $-\frac{\sqrt{2}}{15}$

5.79. $\frac{56}{65}$

5.80. $1\frac{1613}{6710}$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

5.81. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\sqrt{3}$ h) 1

5.82. a) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{-1}{4}$ e) $1\frac{1}{2}$ f) $\frac{-1}{2}$

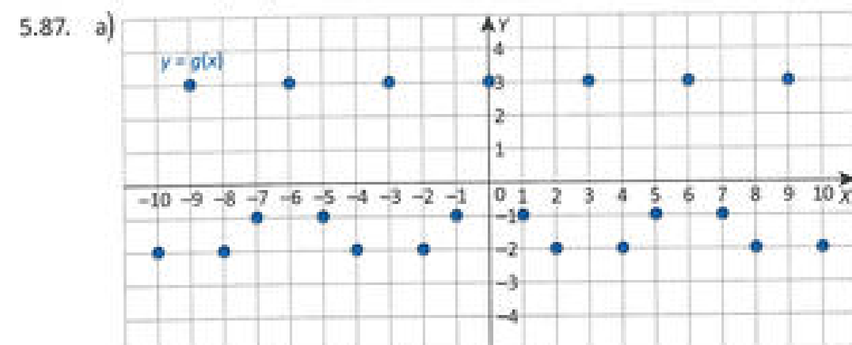
5.83. a) 0 b) 0 c) 2 d) 1

5.84. a) $T = 4$ b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 2 + 4k \wedge k \in Z)$ c) $x = 4k,\ k \in Z$
d) $f(x) = 2 \Leftrightarrow (x = 1 + 2k \wedge k \in Z)$

5.85. a) $T = 8$ $x = 3 + 8k,\ k \in Z$ c) $(x = -2 + 8k \vee x = 8k) \wedge k \in Z$
d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow [(x = 1 + 4k \vee x = -1 + 8k) \wedge k \in Z$
e) $f(x) = -2 \Leftrightarrow [(x = 2 + 8k \vee x = 4 + 8k) \wedge k \in Z]$

5.86. b) $T = 5$ c) $f(x) = 2 \Leftrightarrow (x = 2 + 5k \wedge k \in Z)$ d) $x = 5k,\ k \in Z$

5.87. a)



b) $T = 6$ c) $x = 3k + 1 \vee x = 3k + 2$, gdzie $k \in Z$

5.88. a) $T = \frac{\pi}{2}$ b) $T = 6\pi$ c) $T = 1$ d) $T = \frac{\pi}{2}$ e) $T = 3\pi$ f) $T = 4$

5.89. a) $T = 2$ b) $T = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ c) $T = \pi$ d) $T = \pi$ e) $T = \frac{1}{4}$ f) $T = 4$

5.90. a) funkcja parzysta b) funkcja nieparzysta c) funkcja parzysta d) funkcja parzysta e) funkcja nieparzysta f) funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta

5.92. a) $\langle 1, 3\rangle$ b) $\langle -2, 0\rangle$ c) $\langle -3, +\infty)$ d) $(-\infty, 2\rangle$ e) $(-1, 1\rangle$ f) $\langle 0, 1\rangle$

5.93. a) $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$ b) $\langle -3, 7\rangle$ c) $\langle -5, 3\rangle$ d) $\left\langle -2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right\rangle$

5.94. a) $\langle -1, 2\rangle$ b) $\left\langle 0, \frac{3}{2}\right\rangle$ c) $\langle 0, +\infty)$ d) $\langle -3, -1\rangle$

5.95. a) $\langle 7, 15\rangle$ b) $\left\langle -2\frac{1}{4}, 0\right\rangle$ c) $\langle -4, +\infty)$ d) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right\rangle$

Wykresy funkcji trygonometrycznych

5.96. oś symetrii: $x = \frac{\pi}{2}$ a) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ c) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

5.97. a) $(-\pi, 0)$ b) f malejąca w przedziałach: $\left\langle -\pi, -\frac{\pi}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$; f rosnąca w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ c) $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) < \sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right) < \sin\pi < \sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{5\pi}{6} < \sin\frac{\pi}{5}$

5.98. a) wyrażenie ujemne b) wyrażenie dodatnie c) wyrażenie ujemne d) wyrażenie ujemne e) wyrażenie dodatnie f) wyrażenie ujemne

5.99. oś symetrii: $x = 0$ a) $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ b) $-2\pi, 0, 2\pi$ c) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

5.100. a) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ b) f rosnąca w przedziale $\langle -\pi, 0\rangle$; f malejąca w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$
c) $\cos(-\pi) < \cos\frac{6\pi}{7} < \cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) < \cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{5}$

5.101. a) wyrażenie ujemne b) wyrażenie ujemne c) wyrażenie dodatnie d) wyrażenie ujemne
e) wyrażenie ujemne f) wyrażenie dodatnie

5.102. a) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ b) $\sin 109° > \cos 109°$, $\sin 271° < \cos 271°$
c) $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.103. a) iloczyn jest ujemny b) $-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ c) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

5.104. a) $\mathrm{ctg}3^\circ > \mathrm{ctg}265^\circ > \mathrm{ctg}(-61^\circ) > \mathrm{ctg}178^\circ$ b) $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ c) $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

5.105. a) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ b) $x \in \left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

5.106. a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$ b) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ c) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi\right),\ k \in Z$

5.107. a) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ b) $x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi\right),\ k \in Z$

5.108. a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$ b) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$ c) $x = k\pi$, $k \in Z$ d) $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi),\ k \in Z$

5.109. a) $x = (2k+1)\pi,\ k \in Z$ b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$

c) $x = \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z$ d) $x \in \left\langle \frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2} \right\rangle,\ k \in Z$

5.113. a) $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $g(x) = \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ c) $g(x) = -\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

5.114. a) $\vec{u} = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ b) $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$ c) $\vec{u} = \left[-\frac{4\pi}{9}, 0\right]$

Test sprawdzający do rozdziału 5.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	A	C	D	D	A	D	B	B	A	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{-8}{15}$, $\mathrm{ctg}\alpha = -1\frac{7}{8}$

15. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, zatem $a > b$

16. a) $\alpha = 300^\circ$ b) $\alpha = 150^\circ$

17. a) $4\frac{1}{4}$ b) $16\frac{1}{16}$

18. a) $\frac{\sqrt{14}}{3}$; *wskazówka:* Oblicz $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ i uzasadnij, że $\sin\alpha - \cos\alpha > 0$. b) $\frac{137}{162}$

19. a) -1 b) $-\sqrt{3}$

21. *wskazówka:* Wykaż, że $\mathrm{tg}\alpha = 1$.

27. -1

28. a) $\alpha = \frac{17\pi}{4}$ b) $\alpha = -\frac{17\pi}{10}$

29. a) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{34}}{6}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{6}$, $\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

30. $\frac{-\sqrt{2}}{12}$

31. 2; *wskazówka:* Zastosuj wzory redukcyjne. Następnie pomnóż licznik i mianownik ułamka $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$ przez wyrażenie $1 + \sin\alpha$.

32. a) $T = 4$ b) $T = \frac{\pi}{3}$

33. a) funkcja f jest parzysta b) $\frac{-5\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ c) $D_g = \langle -\pi, \pi \rangle$

d) $x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

34. a) $x \in \left\langle -\pi, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ b) $x = 2k\pi,\ k \in Z$ lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$

c) $T = \pi$

35. a) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ b) $y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$

6. Geometria analityczna

Odcinek w układzie współrzędnych

6.1. a) 11 b) 9 c) 17 d) $6\sqrt{2}$ e) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ f) $3\frac{1}{3}$

6.2. a) $(-1, 2)$ b) $(0, 3)$ c) $(-3, 4)$ d) $(\sqrt{2}, 2)$

6.3. a) $C(9, -3)$, $D(8, 3)$ b) $A(-4, -3)$, $D(-6, 6)$

6.4. a) $D(-6, -2)$, $P(-2, 2)$ b) $C(6, 8)$, $P\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

6.5. a) $|AC| = 2\sqrt{17}$, $|DB| = 8\sqrt{5}$ b) $|DB| = 10$, $|AC| = 10\sqrt{2}$

6.6. a) $|AB| = |DC| = 5$, $|AD| = |BC| = \sqrt{65}$ b) $|AB| = |DC| = 8$, $|AD| = |BC| = 2\sqrt{17}$

6.7. a) $\sqrt{113}$ b) $\sqrt{26}$ c) $\sqrt{53}$

6.8. a) $S_1(-3,-4)$, $S_2(-1,-1)$, $S_3(1, 2)$
b) $S_1(-2,-1)$, $S_2(-6, 1)$
c) $S_1(0, 5)$, $S_2(1, 7)$, $S_3(2, 9)$, $S_4(3,11)$, $S_5(4, 13)$

6.9. a) $S(3, 2)$ b) $S(-2,-1)$ c) $S(1, 3)$ d) $S(1,-4)$

6.10. $D(-1, 0)$, $E(5, 5)$, $F(-1, 4)$

6.13. *wskazówka:* Wykaż, że wszystkie boki czworokąta mają jednakową długość.

6.14. *wskazówka:* Wykaż, że odpowiednie wektory są równe.

6.15. *wskazówka:* Wykaż, że odpowiednie wektory są równoległe.

Równanie kierunkowe prostej

6.16. a) 2,5 b) 1 c) 18 d) –16

6.17. a) $y = -3x + 21$ b) $y = 2x + 32$ c) $y = \frac{1}{3}x - 8\frac{2}{3}$ d) $y = -\frac{3}{4}x - 18$

6.18. a) $y = -3x + 28$ b) $y = 10x - 15$ c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ d) $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$

6.19. a) 45° b) 60° c) 120° d) 135° e) 150° f) 30°

6.20. a) ok. 50° b) ok. 112° c) ok. 108° d) ok. 79°

6.21. a) $k\colon y = -x$ b) $k\colon y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$ c) $k\colon y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$
d) $k\colon y = x - 7$ e) $k\colon y = \sqrt{3}x + 11$ f) $k\colon y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{2}$

6.22. a) pr. AD: $y = -0{,}5x + 1$, pr. BE: $y = \frac{-7}{2}x + 9$, pr. CF: $y = \frac{1}{4}x - 1$ b) $\left(2\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

6.23. a) $a = -0{,}5$ b) $a = -1$ c) $a = 2$ d) $a = 10$

6.24. a) $k\colon y = -2x + 3$

6.25. a) $y = -5$ b) $y = \frac{3}{4}x + 9$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = 0{,}125x + 18$

6.26. a) $m = -\frac{1}{3}$ b) $m = 13$ c) $m = 1\frac{1}{4}$ d) $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

6.27. a) $k\colon y = -\frac{1}{2}x + 3$ b) $(2, 2)$

6.28. a) $y = 1{,}5x + 7$ b) $y = x - 3\sqrt{3}$ c) $y = -0{,}25x + 9{,}5$ d) $y = -1\frac{1}{3}x + 4$

6.29. a) pr. AB: $y = \frac{x}{8} - \frac{3}{2}$, pr. BC: $y = -\frac{1}{2}x + 1$, pr. AC: $y = 2x + 6$

6.30. a) $y = 4x - 2$ b) $y = -x - 1$ c) $y = \frac{1}{2}x - 2$ d) $y = -\frac{3}{2}x + 5$

6.31. *wskazówka:* Wykaż, że środek odcinka AB należy do prostej k oraz $k \perp AB$.

6.32. *wskazówka:* Wykaż, że punkt C należy do prostej k oraz $k \perp AB$.

6.33. *wskazówka:* Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych AB, BC, DC, AC.

6.34. *wskazówka:* Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych AB, BC, DC, AC.

6.35. *wskazówka:* Wystarczy pokazać, że: I. odpowiednie boki są do siebie prostopadłe i mają taką samą długość; albo II. przekątne czworokąta są do siebie prostopadłe, a punkt przecięcia się przekątnych leży w jednakowej odległości od wszystkich wierzchołków czworokąta.

6.36. AB: $y = \frac{1}{6}x - 1$, BC: $y = -\frac{1}{2}x + 3$, AC: $y = 1\frac{1}{2}x + 7$

6.37. AB: $y = \frac{1}{2}x - 2$, BC: $y = -\frac{2}{7}x + 5\frac{6}{7}$, AC: $y = 6x + 31$

6.38. a) $p = -7$ lub $p = -1$ b) $p = 4$ lub $p = 6$ c) $p = 2$

6.39. a) $p = -2$ lub $p = 8$ b) $p = 3$ lub $p = 5$ c) $p = -10$ lub $p = -6$

Równanie ogólne prostej

6.40. a) np. $x - 6 = 0$ b) np. $x + 4y - 5 = 0$ c) np. $x + 6y - 7 = 0$

6.41. a) $2x + y - 8 = 0$ b) $y + 4 = 0$ c) $x - y + 5 = 0$ d) $3x + y = 0$

6.42. a) $-5x + 3y + 12 = 0$ b) $x - \sqrt{5} = 0$ c) $-2x + 3y - 2 = 0$ d) $-2x + y + 5 = 0$

6.43. a) 135° b) 60° c) 120° d) 30° e) 90° f) 0°

6.44. a) tak b) nie c) nie d) tak

6.45. a) $m\colon 3x - 2y + 5 = 0$ b) $m\colon 4x + 9y - 45 = 0$ c) $m\colon x + 4 = 0$ d) $m\colon y - \sqrt{2} = 0$

6.46. a) tak b) tak c) nie d) tak

6.47. a) $m\colon x + 5y - 9 = 0$ b) $m\colon x + \sqrt{7} = 0$ c) $m\colon y - 8 = 0$ d) $m\colon 2x + 3y + 6 = 0$

6.48. a) $A = \frac{-5}{7}$, $C = 5$ b) $B = -1\frac{1}{3}$, $C = -5$ c) $B = 4$, $C = 0$ d) $A = -2$, $C = -6$

6.49. a) $5x - 2y + 1 = 0$ b) $y - 2 = 0$ c) $x + y - 1 = 0$ d) $x + 3 = 0$

6.50. $a = 6$

6.51. $a = 1$ lub $a = -3$

6.52. a) $A = 2$, $B = 6$ b) $A = 12$, $B = -2$

Równanie okręgu

6.53. a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $x^2 + (y + 2)^2 = 5$ c) $(x - 4)^2 + y^2 = 6{,}25$
d) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$ e) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{9}$ f) $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + \left(y + \sqrt{2}\right)^2 = 16$

6.54. a) $S(0, 0)$, $r = 1$ b) $S(1, 0)$, $r = 1{,}5$ c) $S(-1, 2)$, $r = 5$ d) $S(-3, -1)$, $r = 9$

6.55. a) $S(1, 2)$, $r = 3$ b) $S(-3, -5)$, $r = 1$ c) $S(4, 0)$, $r = 3$
d) $S(0, \sqrt{3})$, $r = 3$ e) $S(1, 3)$, $r = 1$ f) $S(0, -2)$, $r = 3$

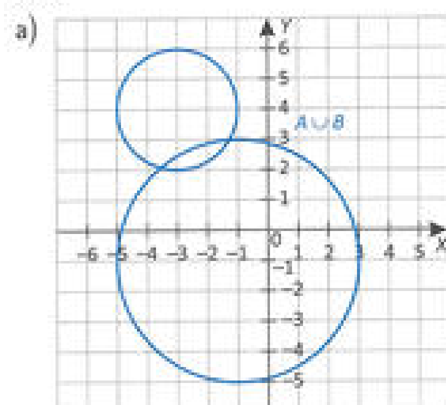
6.56. a) $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $r = 2$ b) $S(0, \sqrt{2})$, $r = 2\sqrt{2}$
c) $S\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $r = 1$ d) $S(1{,}5; -0{,}5)$, $r = 2$

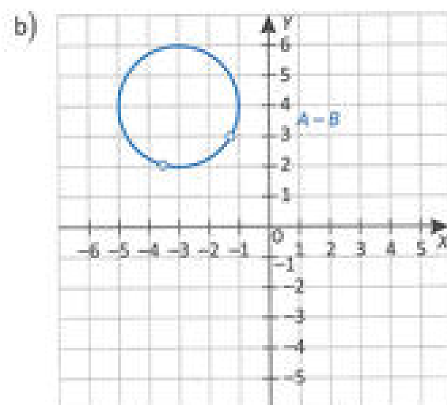
6.57. Nie; tylko punkt $(3, -1)$ spełnia to równanie.

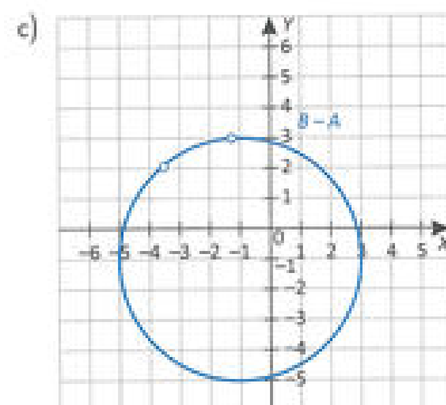
6.58. a) tylko punkty A, B b) tylko punkty A, C

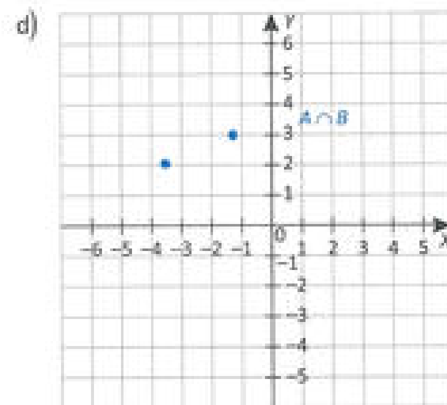
6.59. a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$
c) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$ d) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 72$

6.60.

a) 

b) 

c) 

d) 

6.61. a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$ b) $(x - 3)^2 + y^2 = 25$
c) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$ d) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

6.62. a) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 25$ b) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$
c) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 100$ d) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 169$

6.63. $S\left(\frac{a}{2}, -b\right)$, $r = |a - b|$

Wyznaczanie w układzie współrzędnych punktów wspólnych prostych, okręgów i parabol

6.64. a) $(2, 1)$, $(5, 4)$ b) $(2, 4)$, $(-1, -2)$ c) $(-4, 3)$ d) $(2, 3)$, $(4, 8)$

6.65. a) $(3, 1)$ b) $(3, 3)$, $(7, -1)$ c) $(-7, 3)$, $(-4, -2)$ d) układ sprzeczny

6.66. a) $(-5, 2)$, $(-4, -1)$ b) $(1, 1)$, $(4, 0)$ c) $(2, -1)$, $\left(3\frac{3}{5}, 2\frac{1}{5}\right)$ d) $(-6, -2)$

6.67. a) $(3, 0)$, $\left(-2\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5}\right)$; prosta jest sieczną okręgu
b) $(-5, 1)$; prosta jest styczna do okręgu
c) $(-4, -4)$, $(-6, -2)$; prosta jest sieczną okręgu
d) prosta jest rozłączna z okręgiem

6.68. a) $(-2, 2)$, $(1, -1)$ b) nie istnieją punkty wspólne c) $(-3, 2)$, $\left(2, 4\frac{1}{2}\right)$ d) $(4, -3)$

6.69. a) $o: (x + 3)^2 + y^2 = 10$, $k: x - 3y = -13$, $(-4, 3)$
b) $o: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$, $k: y = x - 1$, $\left(\frac{4 - \sqrt{22}}{2}, \frac{2 - \sqrt{22}}{2}\right)$, $\left(\frac{4 + \sqrt{22}}{2}, \frac{2 + \sqrt{22}}{2}\right)$
c) $p: y = 2x^2 - 16x + 29$, $k: x + y - 2 = 0$, $(3, -1)$, $\left(4\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$
d) $p: y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 5$, $k: 2x + y + 3 = 0$, $(-2, 1)$

6.70. a) suma dwóch prostych: $y = x$, $y = -x$
b) suma dwóch prostych: $y = x + 3$, $y = -x - 3$
c) punkt $(-1, 2)$
d) prosta $x - 4y = 0$
e) suma dwóch prostych: $x = 0$, $y = 2x$
f) suma dwóch prostych: $y = 2x + 3$, $y = -2x - 1$

6.71. a) $(2, 3)$ b) $(0, 3)$, $(1, 2)$ c) $(-4, 0)$, $(-2, 2)$ d) układ jest sprzeczny

6.72. a) $(-5, -2)$, $(-3, 2)$, $(-1, -4)$; suma prostych, okrąg
b) $(-2, -1)$, $(2, -1)$; okrąg, parabola
c) $(-2, 1)$, $(-1, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$; okrąg, parabola
d) $\left(-2\frac{1}{5}, -4\frac{2}{5}\right)$, $\left(-2\frac{1}{5}, 4\frac{2}{5}\right)$, $(1, -2)$, $(1, 2)$ okrąg, suma dwóch prostych
e) $\left(\frac{1}{3}, \frac{25}{9}\right)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$; suma dwóch prostych, parabola
f) $(-4, -4)$, $(-1, 2)$, $(-2, 2)$, $(1, -4)$; parabola, suma dwóch prostych

Zastosowanie układów równań do rozwiazywania zadań z geometrii analitycznej

6.73. $C(-2, 1)$, *wskazówka:* Punkt C jest punktem wspólnym prostej k i symetralnej odcinka AB.

6.74. a) $y = 4 - x$, $y = 2x - 5$ b) $(3, 1)$ c) $\sqrt{10}$

6.75. b) $(-5, 0)$, $(3, -4)$, $(1, 2)$

6.76. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right)$

6.77. a) $A(4, -4)$, $B(1, 5)$ b) $|AB| = 3\sqrt{10}$

6.78. $A(-4, -3)$, $B(2, 3)$, o: $(x + 1)^2 + y^2 = 18$

6.79. a) $D(-2, 1)$ b) $|CD| = 3\sqrt{5}$

6.80. a) $y = 3$, $y = 2x + 1$ b) $(1, 3)$

6.81. a) *wskazówka:* Wykaż, że okrąg i prosta mają tylko jeden punkt wspólny.
b) *wskazówka:* Zauważ, że szukane punkty prostej należą również do okręgu o promieniu 5, współśrodkowego z okręgiem o.

6.82. a) $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$ b) $C(-3, 6)$, $D(1, -2)$

6.83. b) k: $y = \sqrt{3}x + 6$ c) $B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ d) $C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

6.84. $(4, 0)$, $\left(\frac{12+4\sqrt{3}}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{12-4\sqrt{3}}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$

6.85. $\left(-4\frac{1}{3}, 4\frac{1}{9}\right)$, *wskazówka:* Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia się symetralnych boków trójkąta.

6.86. $\sqrt{2}$

6.87. $A(-4, 1)$, $B\left(5\frac{7}{17}, 3\frac{6}{17}\right)$; *wskazówka:* Punkty A i B to punkty przecięcia prostej k z kręgiem $o\left(C, 4\sqrt{2}\right)$.

6.88. $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

6.89. $C\left(-1\frac{5}{13}, -2\frac{1}{13}\right)$ lub $C(2, 3)$; *wskazówka:* Skorzystaj z własności: kąt wpisany, oparty na średnicy jest prosty i poprowadź okrąg o średnicy AB.

6.90. a) $D\left(2\frac{2}{5}, 2\frac{1}{5}\right)$; *wskazówka:* I sposób – Punkt D należy do okręgu o średnicy AB.
II sposób – Punkt D należy do prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt B. b) $C\left(\frac{4}{5}, 5\frac{2}{5}\right)$

6.91. $B(0, 0)$, $C(-3, -1)$, $D(-2, -4)$

Test sprawdzający do rozdziału 6.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	B	C	A	D	B	A	D	B	C

Nr zadania	11	12	13	14	15
Odpowiedź	A	C	D	A	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

16. $C(4, -3)$

20. a) $2x - 3y + 40 = 0$ b) $5x + y + 4 = 0$

21. a) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2$ b) $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ c) $y = -x + 8$

22. a) $2x + y - 4 = 0$ b) $x + 3 = 0$

23. $y = -3x + 9$

24. a) $a \in \{-4, 4\}$, jeśli $a = -4$, to k: $y = 2x + 2$, m: $y = 2x - 3$;
jeśli $a = 4$, to k: $y = -2x + 2$, m: $y = -2x + 3$
b) $a = 0$; wówczas k: $y = 2$, m: $2x - 3 = 0$; Nie istnieje postać kierunkowa prostej m.

25. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 9$; $S\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $r = 3$

26. *wskazówka:* I sposób. Zapisz równanie okręgu o danym środku i promieniu. Następnie sprawdź, że punkty A, B, C należą do tego okręgu. II sposób. Wyznacz punkt wspólny symetralnych dwóch dowolnych boków; następnie oblicz promień okręgu.

27. $C(1, 5)$

28. $A(-6, 1)$, $B(-1, 2)$; *wskazówka:* Punkty A i B należą do okręgu o środku w punkcie C i promieniu $\sqrt{13}$.

29. $C(0, 2)$ lub $C(0, 4)$

30. a) $A(-6, 9)$, $B(-1, 4)$

31. a) $(4, -1)$ b) $(1, -2)$, $(5, 6)$

32. $\left(1\frac{3}{5}, 1\frac{4}{5}\right)$, $(4, 3)$, $\left(1\frac{3}{5}, -1\frac{4}{5}\right)$, $(4, -3)$ b) $(1, 0)$, $\left(1-\sqrt{3}, 3\right)$, $\left(1+\sqrt{3}, 3\right)$

33. a) $A(4, 4)$; $a = 1$
b) $B(1, 1)$, $C(-1, 9)$
c) $x^2 + (y-5)^2 = 17$; *wskazówka:* Zauważ, że trójkąt ABC jest prostokątny, więc środek tego okręgu jest środkiem przeciwprostokątnej.

34. $A\left(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}+1\right)$, $B\left(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}+1\right)$, $C\left(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}+1\right)$, $D\left(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}+1\right)$

35. a) $A(1, 2)$, $B\left(-2\frac{3}{25}, 6\frac{4}{25}\right)$ b) *wskazówka:* I sposób. Skorzystaj ze współrzędnych punktów A, B i oblicz tangens kąta nachylenia prostej AB. II sposób. Zauważ, że prosta AB jest równoległa do symetralnej odcinka, którego końcami są środki okręgów.

7. Geometria płaska – rozwiązywanie trójkątów, pole trójkąta, pole koła

Twierdzenie sinusów

7.1. a) $\sqrt{3}$ b) 4 c) 2 d) 13

7.2. a) $|AB| = 8\sqrt{3}$ cm b) $|AC| \approx 10{,}6$ cm

7.3. a) $|AC| \approx 5{,}9$ cm b) $|AB| \approx 5{,}3$ cm

7.4. a) $b = 32$ cm b) $c \approx 13{,}9$ cm

7.5. a) 6 cm b) 9 cm c) $10\frac{5}{6}$ cm d) 8,5 cm

7.6. a) $R = 5$ cm b) $a = 24$ cm c) $c \approx 5$ cm d) $b \approx 14{,}14$ cm

7.7. $\left(|\sphericalangle B| = 60°, |\sphericalangle C| = 90°\right)$ lub $\left(|\sphericalangle B| = 120°, |\sphericalangle C| = 30°\right)$

7.8. $\left(|\sphericalangle B| = 105°, |\sphericalangle C| = 45°\right)$ lub $\left(|\sphericalangle B| = 15°, |\sphericalangle C| = 135°\right)$

7.9. a) 120°, 30°, 30° b) $6 + 4\sqrt{3}$

7.10. a) 120° b) $R = \sqrt{6}$

Twierdzenie cosinusów

7.14. a) $3\sqrt{13}$ b) $2\sqrt{5}$

7.15. $\cos\alpha = \frac{53}{80}$, $\cos\beta = \frac{25}{32}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{20}$; trójkąt rozwartokątny

7.16. a) trójkąt ostrokątny; $\alpha \approx 86°$ b) trójkąt rozwartokątny; $\gamma \approx 110°$ c) trójkąt prostokątny; $\beta = 90°$

7.17. 60°

7.18. 120°

7.19. a) $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{58}$ cm b) $\sqrt{34+15\sqrt{3}}$ cm, $\sqrt{34-15\sqrt{3}}$ cm

7.20. $|AC| = 3$ cm lub $|AC| = 5$ cm

7.21. a) $|BC| = 4$ cm b) $|BC| = 2\sqrt{6}$ cm

7.22. Jeśli $|\sphericalangle ACB| < 90°$, to obwód jest równy 16 cm. Jeśli $|\sphericalangle ACB| > 90°$, to obwód jest równy $2\left(5+\sqrt{17}\right)$ cm

7.23. 9

7.24. $6{,}5\sqrt{2}$ cm

7.25. $|CD| = 7$ cm, $|BE| = 2\sqrt{19}$ cm

7.26. a) $|CD| = \frac{3\sqrt{46}}{2}$ cm b) $R = \frac{12\sqrt{322}}{35}$ cm

7.27. $|CD| = 7$ cm; *wskazówka:* Niech punkt D będzie środkiem odcinka CE. Oblicz długość przekątnej CE w równoległoboku $AEBC$.

Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania zadań

7.30. $\left(|AC| = |BC| \approx 16{,}17, |\sphericalangle A| = |\sphericalangle B| \approx 72°, |\sphericalangle C| \approx 36°\right)$ lub
$\left(|AC| = |BC| \approx 5{,}25, |\sphericalangle A| = |\sphericalangle B| \approx 18°, |\sphericalangle C| \approx 144°\right)$

7.31. a) $|AB| \approx 96$, $|\sphericalangle B| \approx 48°$, $|\sphericalangle C| \approx 83°$
b) $\left(|AB| \approx 91{,}34, |\sphericalangle B| \approx 51°, |\sphericalangle C| \approx 80°\right)$ lub $\left(|AB| \approx 3{,}24, |\sphericalangle B| \approx 129°, |\sphericalangle C| \approx 2°\right)$

7.32. a) $|AB| = 89\sqrt{3}$, $|\sphericalangle A| = 90°$, $|\sphericalangle C| = 60°$
b) $\left(|AB| \approx 177{,}57, |\sphericalangle A| \approx 64°, |\sphericalangle C| \approx 86°\right)$ lub $\left(|AB| \approx 99{,}54, |\sphericalangle A| \approx 116°, |\sphericalangle C| \approx 34°\right)$

7.34. a) $\left(\alpha = 60°, \gamma = 75°, c = \sqrt{3}+1\right)$ lub $\left(\alpha = 120°, \gamma = 15°, c = \sqrt{3}-1\right)$ b) $\beta = 30°$, $\gamma = 105°$, $c = \sqrt{3}+1$ c) $\gamma = 30°$, $\beta = 90°$, $a = 5\sqrt{3}$, $b = 10$ d) $\alpha = 120°$, $\gamma = 15°$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$

7.35. 41; *wskazówka:* Wykaż, że $|\sphericalangle ADC| = 60°$. Następnie zastosuj twierdzenie cosinusów do wyznaczenia długości boków trójkąta ABC i trójkąta ACD.

7.36. $|AD| = |EB| = \sqrt{3}-1$, $|DE| = 4-2\sqrt{3}$, *wskazówka:* Oznacz $|AD| = x$, $|DC| = y$. Skorzystaj z twierdzenia sinusów w trójkącie ADC i wykaż, że $y = x\sqrt{2}$. Następnie skorzystaj z twierdzenia cosinusów do kąta DAC.

7.38. *wskazówka:* Oznacz: $a = 4x$, $b = 5x$, $c = 6x$, $x > 0$. Następnie oblicz $\cos\beta$ i $\cos\gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów.

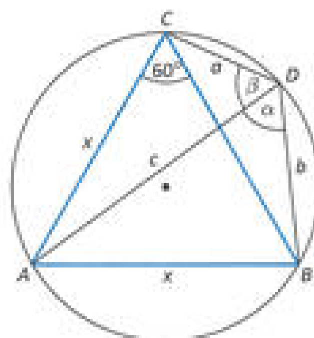
7.39. *wskazówka:* Zastosuj twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC i do trójkąta DBC.

7.40. *wskazówka:* Z twierdzenia sinusów: $\frac{|BC|}{\sin\alpha}=\frac{|AC|}{\sin\beta}$, stąd $\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Otrzymaną równość $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{2}$ podnieś stronami do kwadratu.

7.42. *wskazówka:* Niech $|CD|=d$. Skorzystaj z twierdzenia sinusów w trójkątach ADC i DBC do wyznaczenia d w zależności od $|AD|$ lub $|DB|$ i funkcji trygonometrycznej odpowiedniego kąta.

7.45. Niech D należy do łuku BC, $|CD|=a$, $|DB|=b$, $|AD|=c$. Teza: $a+b=c$; *wskazówka:* Oznacz bok trójkąta ABC przez x.

Zauważ, że $\alpha=|\sphericalangle ADB|=|\sphericalangle ACB|=60^\circ$ oraz $\beta=|\sphericalangle CDA|=|\sphericalangle CBA|=60^\circ$. Zastosuj twierdzenie cosinusów do kątów α i β w trójkątach ABD i ADC; następnie odejmij otrzymane równości stronami i wyłącz wspólny czynnik $(a+b)$ poza nawias.



7.46. a) $|AB|=\sqrt{3}$, $|AC|=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) *wskazówka:* Wyznacz cos 15° z twierdzenia cosinusów dla kąta CBA. Następnie wykaż, że $\cos^2 15^\circ=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

d) *wskazówka:* Daną zależność można zapisać w postaci $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4$. Zauważ, że $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$, gdzie α jest miarą jednego z kątów ostrych tego trójkąta. Po dokonaniu podstawienia otrzymujemy równanie, które doprowadzamy do postaci $\operatorname{tg}^2\alpha-4\operatorname{tg}\alpha+1=0$. Jedno z rozwiązań tego równania jest równe tg 15°. Uzasadnij, że drugie rozwiązanie jest równe tg 75°; skorzystaj z faktu, że iloczyn tych rozwiązań jest równy 1.

7.47. *wskazówka:* Niech a, b, c – długości boków tego trójkąta, h_a, h_b, h_c – wysokości poprowadzone odpowiednio na te boki, $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$. Zauważ, że $h_a=b\cdot\sin\gamma$, $h_c=b\cdot\sin\alpha$, $h_b=a\cdot\sin\gamma$. Z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, stąd $a=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}$. Zatem $h_b=\frac{b\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}$. Wówczas $b\left(\sin\gamma+\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}+\sin\alpha\right)=m$. Oblicz b, następnie a i c.

Pole figury płaskiej

7.48. a) 20,5 b) 15,5 c) 32 d) 20

7.49. a) $s-w+4t$ b) $\frac{3}{2}w+\frac{1}{2}s+t$ c) $2s+\frac{1}{2}w$ d) $\frac{5}{6}w$

Pole trójkąta, cz. 1

7.50. 3 cm

7.51. a) 12 cm b) $48\sqrt{3}$ cm²

7.52. $14\frac{14}{29}$ cm

7.53. 156 cm²

7.54. 6,5 cm, 42 cm, 42,5 cm

7.55. 120 cm²

7.56. 294 cm²

7.57. $14\frac{2}{17}$ cm

7.58. a) $|AB|=20$, $|AC|=|BC|=5\sqrt{5}$; *wskazówka:* Poprowadź wysokość CD i oznacz $|AB|=4x$; wówczas $|BC|=\sqrt{5}x$ oraz $|CD|=x$ b) $h_A=4\sqrt{5}$

7.59. a) *wskazówka:* Wykaż, że $a:b:c=3:4:5$, korzystając ze wzoru na pole trójkąta. b) 2,4

7.60. $7\sqrt{3}$ cm²

7.61. 84 cm²

7.62. a) 35 cm² b) $35\sqrt{3}$ cm² c) $35\sqrt{2}$ cm²

7.63. 30° lub 150°

7.64. a) 150° b) $6\sqrt{10+3\sqrt{3}}$ cm

7.65. a) 7 cm b) $\frac{20\sqrt{3}}{7}$ cm

7.66. a) 5 cm, 5 cm, $3\sqrt{10}$ cm b) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

7.67. 8 cm, 10 cm

7.72. a) 30 cm² b) 40 cm²

7.73. 16 cm²

7.74. a) 5 : 2 oraz 5 : 3 b) 18

7.76. $34\frac{2}{3}$

7.77. $|AB|=8$ cm

7.79. $84\sqrt{2}$ cm²

7.80. a) $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ b) $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

7.81. a) $3-\sqrt{3}$; *wskazówka:* Oznacz $|CD|=x$. Zapisz sumę pól trójkątów ADC i CDB na dwa sposoby. b) $P_{ADC}=3\sqrt{3}-3$, $P_{CDB}=9-3\sqrt{3}$

7.82. a) $3\sqrt{3}$ b) *wskazówka:* I sposób: Zauważ, że $P_{ADC} = P_{CDB}$. II sposób: Utwórz równoległobok $AEBC$ i skorzystaj z twierdzenia cosinusów.

7.83. a) $|AB| = 2$, $|AC| = |BC| = 2\sqrt{7}$; *wskazówka:* Wykaż, że trójkąt ABS jest równoboczny i oblicz $|AB|$. Następnie oblicz $|BL|$, korzystając z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABL. b) $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, więc $|\sphericalangle ACB| < 30°$

7.84. a) 78 cm² b) $2\sqrt{13}$ cm

7.85. $\left(|BC| = 10 \text{ cm}, |AC| = 2\sqrt{10} \text{ cm}\right)$ lub $\left(|BC| = 7{,}5 \text{ cm}; |AC| = \frac{\sqrt{265}}{2} \text{ cm}\right)$; *wskazówka:* Niech $|AD| = h$, $|CD| = x$, wówczas $|DB| = 4x$. $P_{ADC} = 6$ cm². Zatem $x \cdot h = 12$ oraz $h^2 + (4x)^2 = 100$. Otrzymany układ równań sprowadź do równania dwukwadratowego i rozwiąż je.

Pole trójkąta, cz. 2

7.87. $r = 9$ cm

7.88. 42 cm

7.89. a) $4{,}5\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm² b) $r = \frac{3\left(1+\sqrt{3}\right)}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ cm $\approx 1{,}3$ cm

7.90. a) 32 cm b) $r = 3$ cm

7.91. a) 14 cm, 25 cm, 25 cm b) kąt α jest ostry (dlaczego?); $\sin\alpha = \frac{336}{625}$, więc $\frac{1}{2} < \sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ stąd $30° < \alpha < 45°$

7.92. 11,2 cm

7.93. a) 17 cm b) $R = 9\frac{19}{30}$ cm

7.94. a) 192 cm²; *wskazówka:* Oznacz długość ramienia przez $5x$; wówczas podstawa ma długość $2 \cdot 4x$, stąd $8x = 32$ c) $R = 16\frac{2}{3}$ cm

7.95. 24 cm b) $r = 4$ cm

7.96. a) 34 cm b) $r = 7$ cm

7.97. a) $\frac{84}{85}$ b) 28 cm; *wskazówka:* Oblicz cosinus kąta między ramionami i skorzystaj z twierdzenia cosinusów c) $R = 14\frac{1}{6}$ cm

7.98. a) 60° b) 7 c) $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ d) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

7.99. $25\left(2+\sqrt{3}\right)$; *wskazówka:* Oblicz najpierw długość najdłuższego boku, korzystając z twierdzenia sinusów. Następnie skorzystaj z twierdzenia cosinusów do wyznaczenia kwadratu długości ramienia.

7.100. $\frac{75\sqrt{3}}{4}$

7.101. a) 84 cm² b) $r = 3{,}5$ cm c) $R = 10\frac{5}{8}$ cm

7.102. a) 33,6 cm; 15 cm; $21\frac{7}{13}$ cm b) $\frac{5}{13}$ c) $R = 32{,}5$ cm

7.103. a) $32\sqrt{2}$ cm² b) $r = 2\sqrt{2}$ cm; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia o odcinkach stycznych.

7.104. a) $P_1 = 14{,}4$ cm², $P_2 = 9{,}6$ cm² *wskazówka:* Oblicz długości odcinków, na jakie prosta podzieliła przeciwprostokątną b) $r_1 : r_2 = 3 : 2$

7.105. 84 cm²

7.106. 240 cm²

7.107. 29 cm

7.108. 41 cm

7.109. $2\sqrt{15}$ cm

Pola trójkątów podobnych

7.110. 6 cm²

7.111. 11 cm

7.112. a) 25 : 64 b) 1 : 4 c) 4 : 25 d) 1 : 9

7.113. a) 4 : 25 : 36 b) 4 : 21 : 11

7.114. 1 : 3 : 5

7.115. $|A_1B_1| = 14$ cm, $|AB| = 21$ cm

7.116. 1 : 3 : 4

7.117. 24; *wskazówka:* Poprowadź wysokość CD i oblicz pola trójkątów ADC oraz DBC.

7.118. a) 12 cm² b) 288 cm²

7.119. $11\frac{23}{27}$ cm²

7.120. $21\frac{1}{3}$ cm²

7.121. $|DB| = 5$ cm, $|BE| = 4$ cm, $|DE| = 3$ cm

7.122. 36%

7.123. 5 : 4

7.124. 300 cm²

7.125. 6 cm²

7.126. a) 25 cm b) $P_{AEC} = 250 \text{ cm}^2$, $P_{EDB} = 40 \text{ cm}^2$ c) 30°

7.127. b) 168 cm²

7.128. a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) 3 : 8; *wskazówka:* Zauważ, że $\Delta ADS \sim \Delta SEC$

7.130. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; *wskazówka:* oznacz $|EF| = x$, $|EB| = y$. Utwórz układ równań z niewiadomymi x i y.

Pole koła, pole wycinka koła

7.131. a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{3}{4}$

7.133. $4{,}5\pi \text{ cm}^2$ b) $60\pi \text{ cm}^2$ c) $3{,}75\pi \text{ cm}^2$

7.134. a) 8 cm b) 5 cm c) 30 cm

7.135. a) $\pi - 2$ b) $3\pi - 2{,}25\sqrt{3}$ c) $15\pi - 9$

7.136. 36 cm

7.137. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

7.138. $9\pi \text{ cm}^2$

7.139. a) $(3+2\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$ b) $(7+4\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$

7.140. $6\pi \text{ cm}^2$; *wskazówka:* Wykaż, że $\frac{\alpha}{2} = 30°$.

7.141. $2(3\sqrt{3}+2\pi) \text{ cm}^2$

7.142. $\frac{(4-3\sqrt{3})r^2}{6}$; *wskazówka:* Niech O_1 i O_2 będą środkami kół; A – jednym z punktów przecięcia się okręgów. Zauważ, że trójkąt O_1O_2A jest równoboczny.

7.143. $\frac{5\pi-3\sqrt{3}}{\pi+3\sqrt{3}}$

7.144. 45

Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń

7.145. *wskazówka:* Przedstaw pole trójkąta ABC na dwa sposoby: $P = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2}$ oraz $P = P_{ABM} + P_{CAM}$.

7.146. Rozpatrz dwa przypadki: krótszy bok zawiera się w boku długości b albo w boku długości a. Przedstaw pole trójkąta jako sumę pól odpowiednich trójkątów. $\frac{ab}{2a+b} < \frac{ab}{a+2b}$, więc $\frac{ab}{2a+b} \cdot \frac{2ab}{2a+b} < \frac{ab}{a+2b} \cdot \frac{2ab}{a+2b}$

7.147. *wskazówka:* Przedstaw pole trójkąta ABC jako sumę pól trójkątów AMC i MBC.

7.148. *wskazówka:* Wykorzystaj zależności: $a = \frac{2P}{h_a}$, $b = \frac{2P}{h_b}$, $c = \frac{2P}{h_c}$

7.149. *wskazówka:* Wykorzystaj własność: środkowa w trójkącie dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach. Następnie skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta: w punkcie a) do trójkątów ABC i ADC, w punkcie b) do trójkątów ADC i DBC.

7.151. *wskazówka:* Przedstaw iloraz pól trójkątów ADC i DBC na dwa sposoby.

7.152. *wskazówka:* Wyraź pole P trójkąta za pomocą sumy pól trójkątów ABM, BCM i AMC. Następnie wykorzystaj zależności: $a = \frac{2P}{h_a}$, $b = \frac{2P}{h_b}$, $c = \frac{2P}{h_c}$.

7.153. *wskazówka:* Oznacz pole trójkąta przez P. Wówczas: $a = \frac{2P}{h_a} = \frac{18P}{d}$, $b = \frac{2P}{h_b} = \frac{20P}{d}$, $c = \frac{2P}{h_c} = \frac{28P}{d}$. Zatem $a : b : c = 9 : 10 : 14$

7.155. *wskazówka:* Teza: $\frac{ab}{2} = xy$.



Oznaczmy promień okręgu przez r, wówczas $x = a - r$, $y = b - r$. Wystarczy pokazać, że $(a-r)(b-r) = P_\Delta$. Wyraź pole trójkąta w postaci sumy pól czterech trójkątów zaznaczonych na rysunku i kwadratu o boku r.

7.156. *wskazówka:* $\frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} = 9\frac{2P}{a+b+c}$, stąd $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c}$, więc $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} = 9$. Przekształć równość do postaci: $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) = 6$. Następnie skorzystaj z własności: dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, przy czym równość ma miejsce tylko wtedy, gdy $x = y$.

Test sprawdzający do rozdziału 7.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Odpowiedź	B	C	C	A	B	D	C	B	C	D	C	B	D	A	A

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

16. $\alpha = 45°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 15°$

17. a) $(\alpha = 60°, \gamma = 75°, c = \sqrt{3}+1)$ lub $(\alpha = 120°, \gamma = 15°, c = \sqrt{3}-1)$ b) $\beta = 30°$, $\gamma = 105°$, $c = \sqrt{3} + 1$ c) $\gamma = 30°$, $\beta = 90°$, $a = 5\sqrt{3}$, $b = 10$ d) $\alpha = 120°$, $\gamma = 15°$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$

18. 10, 10, $10\sqrt{2-\sqrt{2}}$

19. a) 30°, 30° b) 8 cm c) $8\sqrt{7}$ cm

20. 12 cm

21. $r = 6$ cm

22. a) 126 cm^2 b) $\frac{63}{65}$ c) $r = 4\frac{2}{3}$ cm d) $R = 10\frac{5}{6}$ cm

23. a) 7 b) $h = \frac{20\sqrt{3}}{7}$ c) $d = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ d) $s = \frac{\sqrt{129}}{2}$

24. a) 17 cm b) $r = 6$ cm

25. a) $c = 9$ cm b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\beta = \frac{8\sqrt{5}}{21}$, $\sin\gamma = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

28. $10\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

29. $12\sqrt{3}$ cm^2

30. 60 cm^2

31. $\frac{25}{64}$

32. 4 cm; *wskazówka:* Wykaż, korzystając z własności kątów wpisanych w koło, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta ACE. Skala tego podobieństwa jest równa 3, więc $|EB| = 3 \cdot |CE|$.

33. a) $r = 8$ cm b) 225°

34. a) $|DB| = 4{,}5$ cm b) $\frac{9}{16}\left(4-3\sqrt{3}\right)$ cm^2

36. a) 93,6 cm b) $14\frac{1}{12}$ cm, $9\frac{11}{12}$ cm c) $\left(\frac{65}{119}\right)^2 \approx 0{,}298$

37. *wskazówka:* Wykaż, że $|\sphericalangle AMB| = 180° - |\sphericalangle ACB|$; następnie zastosuj twierdzenie sinusów w obu trójkątach do boku AB.

39. *wskazówka:* Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$. Następnie oblicz tangens jednego z kątów ostrych danego trójkąta.

40. *wskazówka:* Oznacz długość boku AB, $|AB| = 5x$; wówczas $|AC| = 4x$, $|BC| = 3x$. Wykaż, że $r = x$.

8. Wielomiany

Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

8.1. Wielomiany są w przykładach: a, b, e, g, h, i.

8.2. a) 8 b) 17 c) 48 d) 21

8.3. a) 3 b) 6 c) 5 d) 3

8.4. a) $F(x) = 10 - x^2 + 8x^4$; st. $F(x) = 4$; $a_0 = 10$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 8$
d) $W(x) = x^2$, st. $W(x) = 2$; $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$

8.5. a) $F(x) = -5x^4 + 5x^2 - 4x - 3$; st. $F(x) = 4$; $a_4 = -5$, $a_3 = 0$, $a_2 = 5$, $a_1 = -4$, $a_0 = -3$
b) $G(x) = 8$; st. $W(x) = 0$; $a_0 = 8$

8.7. a) $W(-3) = 56$, $W(-1) = -2$, $W(4) = -7$, $W(5) = -32$
b) $W\left(\sqrt{2}+1\right) = 3\sqrt{2}+5$, $W\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{6}+9\sqrt{3}-11\sqrt{2}-4$

8.8. a) np. $W(x) = 3x^5 + x^2 + 8$ b) np. $W(x) = x^4 + \sqrt{2}\,x^3$

8.9. a) 0 b) −1 c) 1 d) −32

8.10. $a = 2$

8.11. $a = 4$, $b = 1$

8.12. $a = -3$, $b = -5$

8.13. $b = 4$

8.14. $a = 0$

8.15. $a = 7$, $b = -3$

8.16. $a = -2$ lub $a = 1\frac{1}{2}$

8.17. ($a = 4$ i $b = 12$) lub ($a = -3$ i $b = 12$)

8.18. *wskazówka:* a) $a = -7$, $b = 5$, $c = 4$ b) ($a = -2$ i $b = -16$) lub ($a = 2$ i $b = 8$)

8.19. a) Jeśli $m \in R - \{-1, 1\}$, to st. $W(x) = 3$; jeśli $m = 1$, to st. $W(x) = 2$; jeśli $m = -1$, to st. $W(x) = 0$
b) Jeśli $m \in R - \{-7, 3\}$, to st. $W(x) = 4$; jeśli $m = -7$, to st. $W(x) = 3$; jeśli $m = 3$, to st. $W(x) = 2$

8.22. *wskazówka:* Oblicz $W(5)$ oraz $W(1)$ i zauważ, że $W(5) - W(1) = 305$. Jeśli współczynniki byłyby całkowite, to lewa strona otrzymanej zależności byłaby parzysta, a prawa – nieparzysta, co prowadzi do sprzeczności.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów

8.23. a) $-x^5 + 2x^3 + x^2 - 2$ b) $12x^5 + x^4 - 4x^3 - x + 1$ c) $-4x^2 + 2x + 3$ d) $-2x^3$

8.24. a) $-x^6 + 6$ b) $8x^3 + 0{,}1x$ c) $-2x^6 + \sqrt{2}x^5 + 2\sqrt{2}x^3 + 4x + 1$
d) $(\sqrt{2}-1)x^4 + (1-3\sqrt{3})x^3 + (4-\sqrt{3})x^2 + 1 + \sqrt{2}$

8.25. a) $3x^6 + x^4 - 2x^2 - 2x + 1$ b) $-4x - 14$ c) $-3x^2 + 2x + 6$ d) $4x^7 - 6x^3$

8.26. d) $F(x) = -3x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ e) $F(x) = -3x^5 - 5x^4 + 14x^3 + 5x^2 - 3x$
f) $F(x) = -6x^5 + 8x^4 + 13x^3 - 14x^2 - 6x + 3$

8.27. a) $2x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 3x - 14$ b) $6x^3 + 2x^2 - x + 2$
c) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 8$ d) $x^4 - 5x^3 - 4x - 8$

8.28. a) $3x^5 + 4x^3 - 3x^2 - 4x + 2$
b) $4x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
c) $36x^6 - 27x^5 - 39x^4 + 36x^3 + 4x^2 - 12x + 4$
d) $3x^8 + 10x^6 - 6x^5 + 4x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 8x - 2$

8.29. a) $x^{12} - x^{11} - x^9 + x^8$ b) $x^{16} + x^{15} - x^4 - x^3$
c) $x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^9 - x^5 - x^3$ d) $x^9 - x^8 - x^7 + x^4 - x^3 - x^2$

8.30. a) $9x^4 - 16x^2$ b) $25x^6 - 60x^4 + 36x^2$ c) $9x^{14} + 12x^8 + 4x^2$ d) $81x^{14} - x^6$

8.31. a) $-4x^3 - 4x$ b) $-12x^3 - 8x$ c) $10x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 1$ d) $5x^4 - 4x^3 + 25x^2$

8.32. a) $x^7 - x^5 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ b) $3x^7 + 6x^5 - x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 17x + 5$
c) $x^5 + 12x^4 + 24x^3 + 6x + 2$ d) $9x^3 + 6x^2 + 2x - 5$

8.33. a) st. $W(x) = 13$; $a_0 = -125$, $a_{13} = -24$ b) st. $W(x) = 10$; $a_0 = 8$, $a_{10} = 12$
c) st. $W(x) = 6$; $a_0 = -5$, $a_6 = 18$ d) st. $W(x) = 20$, $a_0 = 0$, $a_{20} = -18$

8.34. a) $-6x^9 + 7x^8 - 11x^7 + 10x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 7x + 2$
b) $6x^9 - 4x^8 - 5x^7 + 7x^6 - 2x^5 - 11x^4 + 15x^2 + 5x - 12$
c) $-5x^7 + 12x^6 - 17x^5 + 44x^4 - 31x^3 + 28x^2 - 27x + 4$
d) $6x^{15} - 12x^{13} + 9x^{12} - 10x^{11} + 20x^9 - 42x^8 + 5x^7 + 10x^6 + 2x^5 + 19x^4 - 15x^3 + 4x^2 + 10$

Równość wielomianów

8.37. Wielomiany są równe w punktach: a), b), d).

8.38. a) $a = -2$ b) nie istnieje c) nie istnieje d) $a = -2$

8.39. a) $a = 3$ b) $a = 2$ c) $a = -3$ d) $a = 1$

8.40. a) $a = 1$, $b = 3$ b) nie istnieją; *wskazówka:* $(2ax - b)^3 = (2ax - b)^2(2ax - b)$
c) $a = 2$, $b = 3$ d) $a = -1$, $b = 2$

8.41. a) $a = -5$, $b = -5$ b) $a = -3$, $b = 1$

8.42. a) $a = 2$, $b = -3$ b) $a = -1$, $b = 3$

8.43. a) $b = 2$, $c = 4$ b) $b = 5$, $c = 1$

8.44. $a = 1$, $b = 5$

8.45. $a = 3$, $b = 1$

8.46. a) $(a = 3, b = 3, m = 6, n = 15)$ lub $(a = -3, b = -3, m = -6, n = 3)$
b) $a = 2$, $b = 3$, $m = 10$, $n = 9$
c) $(a = -3, b = -2, m = -6, n = 12)$ lub $(a = 3, b = -2, m = 6, n = -12)$ lub
$(a = -1, b = 2, m = -2, n = -4)$ lub $(a = 1, b = 2, m = 2, n = 4)$
d) $(a = -2\sqrt{2}, b = -1, m = -4\sqrt{2}, n = 4\sqrt{2})$ lub
$(a = 2\sqrt{2}, b = -1, m = 4\sqrt{2}, n = -4\sqrt{2})$ lub $(a = -2, b = 1, m = -4, n = -4)$
lub $(a = 2, b = 1, m = 4, n = 4)$

Wzory skróconego mnożenia stopnia 3. Wzór na $a^n - b^n$

8.47. a) $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$ b) $8 + 12a + 6a^2 + a^3$ c) $1 + 9x + 27x^2 + 27x^3$
d) $4 + 3\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3}$ e) $125 - 75b + 15b^2 - b^3$ f) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
g) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ h) $-1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$

8.48. a) $10 - 6\sqrt{3}$ b) $44 + 18\sqrt{6}$ c) $62\sqrt{2} - 55$ d) $200\sqrt{2} + 102\sqrt{6}$
e) $10 + 12\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}$ f) $-12 - 9\sqrt[3]{3} - 9\sqrt[3]{9}$ g) $12 - 24\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}$
h) $205 + 30\sqrt[3]{5} + 60\sqrt[3]{25}$

8.49. a) $x^3 + a^3$ b) $27 + x^3$ c) $y^3 + 64$ d) $8 - y^3$ e) $x^3 - 125$ f) $2\sqrt{2} - z^3$

8.50. a) 3 b) 17 c) 5 d) -7

8.51. a) $3x^2 - 9x + 7$ b) $3x^3 + 18x + 6$ c) $3x^2 - 3x + 2$
d) $2x^3 - 9x^2 - 27x - 51$ e) $2x^3 + 12x^2 + 48x$ f) $2x^3$

8.52. a) $x^3 + 9x - 25$ b) $-6x^3 - 39x^2 + 38x - 25$ c) $7x^3 - 9x^2 + 15x - 2$
d) $-4x^2$ e) $x^6 + 7x^2$ f) $26x^3 - 39x^2 + 33x - 20$

8.53. a) $x \in \left\{-2\frac{5}{7}, 2\right\}$ b) $x \in \left\{-1, -\frac{5}{8}\right\}$ c) $x \in \left\{-1, 5\frac{1}{9}\right\}$ d) $x \in \{-19, -1\}$

8.54. a) $x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup \langle -2, +\infty)$
c) $x \in \langle -1, 4 \rangle$ d) $x \in (-2, 8)$

8.55. a) $(x - 1)^3$ b) $(x + 6)^3$ c) $(3 - y)^3$ d) $(2x + 3y)^3$ e) $(1 + 2x)^3$ f) $(1 - 5y)^3$

8.56 a) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$ b) $(1 - x)(1 + x + x^2)$ c) $(3z - 1)(9z^2 + 3z + 1)$
d) $(2k - 5)(4k^2 + 10k + 25)$ e) $(4 + 3y)(16 - 12y + 9y^2)$
f) $(5a + 6)(25a^2 - 30a + 36)$ g) $\left(\sqrt{5} + x\right)\left(5 - \sqrt{5}x + x^2\right)$ h) $\left(y - \sqrt{2}\right)\left(y^2 + \sqrt{2}y + 2\right)$

8.57. a) $\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{6}$ c) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ d) $\frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{2}$ e) $\frac{9 - 3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}{16}$
f) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3}$ g) $\frac{4 - \sqrt[3]{2}}{31}$ h) $\frac{9 - 9\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{12}$

8.58. a) $x \in \{-25, 33\}$ b) $x \in (-\infty, -10) \cup (0, +\infty)$ c) $x \in \langle -12, 8 \rangle$
d) równanie sprzeczne e) $x \in R$ f) nierówność sprzeczna

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu

8.81. a) *wskazówka:* Wykaż, że $\left(\sqrt{3} + 1\right)^3 = 6\sqrt{3} + 10$.

8.82. *wskazówka:* Niech $a = 6n + 1$, $n \in N$. Wykaż, że liczba $3^{6n+1} - 3$ jest podzielna przez 13, wyłączając najpierw 3 poza nawias.

Podzielność wielomianów

8.84. *wskazówka:* Skorzystaj z poznanych wzorów skróconego mnożenia.

8.85. *wskazówka:* Przedstaw trójmiany kwadratowe w postaci iloczynowej.

8.87. a) $(x+1)(x-3)$

8.88. np. $6x(4-x)(x+2)$, $x^2(x+2)$, $x^2(4-x)$

8.90. *wskazówka:* Zapisz trójmian kwadratowy $P(x)$ w postaci iloczynowej.

8.91. *wskazówka:* Zapisz trójmian kwadratowy $P(x)$ w postaci iloczynowej.

8.93. *wskazówka:* $P(x) = (x+2)^3$

8.94. a) $P(x) = -3x + 4$ b) $P(x) = 3x + 4$ c) $P(x) = -x + 1$

8.95. $a = -7$, $b = 2$

8.96. $a = 5$, $b = 2$

8.97. $a = 10$, $b = 3$

8.98. $P(x) = 3x - 2$

8.99. $P(x) = 2x - 3$

8.100. $P(x) = 4x^2 - 20x + 21$

8.101. $Q(x) = x^2 - 6x + 36$

8.102. $Q(x) = 6x^2 - 7x - 3$

8.103. a) $Q(x) = x^3 + 1$ b) $Q(x) = x^2 - x + 1$

8.104. $P(x) = 2x + 1$

8.105. $Q(x) = x^3 - x^2 - 5x + 3$

8.106. $P(x) = -3x^4 - 6x^3 + 4x + 8$

8.107. $Q(x) = 7x^3 + 45x^2 + 79x + 21$ b) $Q(x) = 2x + 1$

Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy. Schemat Hornera

8.108. a) $x^2 - 2x + 4$ b) $x^2 - 4x + 7$ c) $x^2 - x + 1$ d) $x^3 + 6x^2 - 6x - 1$

8.109. a) $100x^2 - 80x + 15$ b) $38x^2 - 12x - 2$ c) $16x^3 + 4x^2 - 8x + 4$ d) $2x^4 - 2$

8.110. a) $x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ b) $3x^3 + 2x - 1$ c) $x^3 + 8x + 4$ d) $x^3 + 4$

8.111. a) $3x - 8$, $r = 17$ b) $-2x^2 - 2x + 2$, $r = -1$ c) $4x^3 - 4x^2 + 7x - 13$, $r = 16$
d) $-3x^3 - 7x^2 - 21x - 63$, $r = -185$ e) $x^4 - 3x^3 + 13x^2 - 41x + 123$, $r = -368$
f) $x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x + 12$, $r = 25$

8.112. a) $x^2 + 3x + 4$ b) $x^2 + x + 1$ c) $3x^2 + 2x + 3$ d) $2x^2 + x + 5$

8.113. a) $3x^3 + 2x + 1$ b) $2x^3 + 4x^2 + 6$ c) $3x^3 + 6x + 9$ d) $5x^3 + 10x^2 + 5$

8.114. a) $x^2 + x - 2$ b) $2x^2 - 4x + 9$ c) $-x^2 + x + 3$
d) $5x^2 + 10x + 13$ e) $2x^3 + 2x^2 + 2x - 3$ f) $-3x^3 + 3x^2 - x + 1$

8.115. a) 3, $r = -7$ b) -4, $r = -27$ c) $x^2 - 2x + 4$, $r = -9$ d) $3x^3 + 6x^2 + 12x + 22$, $r = 52$
e) $5x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 7$, $r = 14$ f) $-2x^4 + 6x^3 - 14x^2 + 42x - 126$, $r = 384$

8.116. a) $2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 5$, $r = -10$ b) $-3x^3 - 6x^2 - 12x - 22$, $r = -28$
c) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $r = 0$ d) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $r = 0$
e) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $r = 2$
f) $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $r = 0$

8.117. a) -9 b) 7 c) 10 d) -17

8.118. a) $r = -18$

8.119. $m = -1$ lub $m = 4$

8.120. $m = -3$ lub $m = -2$

8.121. $a \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

8.122. $a \in \left(-1, 1\frac{1}{2}\right)$

Dzielenie wielomianu przez wielomian stopnia większego od 1

8.123. a) $6x - 2$ b) $x + \frac{1}{2}$ c) $2x - 1$ d) $12x + 4$

8.124. a) $x^3 + 2x$ b) $x^3 - 3$ c) $\frac{1}{3}x^2 - x$ d) $\frac{1}{2}x + 1$ e) $x^3 + x^2 + 5$ f) $x^3 - 1$

8.125. a) $Q(x) = x^2 + 3$, $R(x) = 3x + 5$
b) $Q(x) \equiv 0$, $R(x) = x^4 + 5$
c) $Q(x) = x - 1$, $R(x) \equiv 0$
d) $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{1}{2}$, $R(x) = -\frac{16}{3}x^2 - \frac{17}{3}x - 1$
e) $Q(x) = 4$, $R(x) = 24x^2 - 5$
f) $Q(x) = x^3 - 1$, $R(x) \equiv 0$

8.126. a) $Q(x) = x^6 + 2x^3 + 3$, $R(x) = -2$
b) $Q(x) \equiv 0$, $R(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 7$
c) $Q(x) = x^5 + x^3 + 3$, $R(x) = 3x^2 - x - 6$
d) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$, $R(x) = 3x^4 + 5$
e) $Q(x) = x^4 - 1$, $R(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$
f) $Q(x) = x^5 - 3x^4 + 1$, $R(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

8.127. $W(x) = -2x^5 - 8x^4 + x^3 + 11x^2 + 5x + 3$

8.128. $W(x) = 10x^4 - 14x^3 + 28x^2 - 41x + 7$

8.129. $R(x) = -x + 3$

8.130. $R(x) = -12x - 16$

8.131. $r = 22$

8.132. $r = -2$

8.133. $R(x) = 2x + 4$

8.134 $R(x) = -x + 1$

8.135. $a = 4$, $b = 3$

8.136. $a = 7$, $b = -3$

8.137. $R(x) = x^2 + 2x + 3$

8.138. $R(x) = -3x^2 + 2x + 5$

8.139. $a = 2$, $b = 6$
8.140. $(a = -1,\ b = -1)$ lub $(a = 4,\ b = -2)$

Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bezouta

8.141. a) tak b) tak c) nie d) tak
8.142. a) 3 b) $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$
8.143. a) st. $W(x) = 6$; pierwiastki: $2,\ 2\frac{1}{2}$ b) st. $W(x) = 6$; pierwiastki: $-5, -2, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, 3$
c) st. $W(x) = 7$; pierwiastki: $0,\ \frac{1}{3}$ d) st. $W(x) = 6$; pierwiastki: $-3, 3$
8.144. b) np. $W(x) = x^2(x^2 - 5)(x^2 - 3)$ d) np. $W(x) = (x + 2)^2(x^4 + 3)$
8.145. a) tak b) tak c) nie d) tak
8.146. a) $k = -2$ b) $k = 1$ c) $k = -\frac{2}{3}$ lub $k = \frac{1}{2}$ d) $k = -2$ lub $k = \frac{1}{3}$.
8.147. a) $-6, -1, \frac{1}{3}$ b) 4 c) $-3, 1, 3\frac{1}{2}$ d) $-1, -\frac{1}{4}, 2$ e) $-2, 3$ f) 1
8.148. a) 5 b) $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ c) $-1, \frac{1}{2}$ d) nie istnieją inne pierwiastki
8.149. a) -1, 1 b) nie istnieją inne pierwiastki c) -3, 1, 3 d) -4, 4
8.150. a) $a = -2$; pozostałe pierwiastki: $-2, -1$ b) $a = 3$; pozostałe pierwiastki: $\frac{2}{3}, 3$
8.151. a) $a = -7$; pierwiastki: $-2, -\frac{1}{4}, 1$ b) $a = 3$; pierwiastki: $-3, -2, \frac{1}{2}$
8.152. a) $a = 2$, $b = 1$; $x^3 = -1$ b) $a = 1$, $b = -4$; $x^3 = -2$
8.153. a) $a = 0$, $b = 7$; pierwiastki: $-3, 1, 2$ b) $a = 8$, $b = 4$; pierwiastki: $-4, \frac{1}{3}, 1$
8.156. $W(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$; *wskazówka:* st. $W(x) = 3$ i wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumiany $x + 2$, $x - 1$ oraz $x - 4$; zatem $W(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 4)$. Z warunku $W(-1) = 30$ oblicz a; następnie doprowadź wielomian $W(x)$ do postaci uporządkowanej.
8.157. $W(x) = -2x^4 + 11x^3 - 14x^2 - 9x + 18$
8.158. $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$; $m = 23$, $n = -15$
8.159. $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = -9$; $a = 7$, $b = -21$
8.160. $a \in \{-2, 2\}$, $b = 28$; $x \in \{1, 3, 5\}$
8.161. $a \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$; $x \in \{2, 4, 8\}$

Pierwiastki wymierne wielomianu

8.162. a) $-3, -2, 1$ b) 2 c) $-1, 1$ d) $-2, -1$ e) $-3, -2, 1, 3$ f) $-4, 1$
8.164. *wskazówka:* Wskaż trzy liczby całkowite, które są pierwiastkami wielomianu $W(x)$ i powołaj się na własność: Wielomian stopnia 3. może mieć co najwyżej trzy pierwiastki.
8.165. a) -2, 2; *wskazówka:* Wyznacz pierwiastki wielomianu $Q(x) = 4 \cdot W(x)$ b) -3, 1, 2 c) -4 d) $-4, -2, 1, 3$
8.166. a) 2 b) $-2, -1, \frac{1}{3}$ c) -3, 4 d) $-4, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$
e) 2 f) 1 g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2$ h) $-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}$
8.167. pierwiastki całkowite wielomianu $W(x)$: $2, -1$
8.168. *wskazówka:* Liczba 3 to jedyna liczba pierwsza, która jest dzielnikiem liczby -12.
8.169. a) $a = -5$, $b = 7$
8.170. $a = 5$; pierwiastki: $-1, 1, 5$; *wskazówka:* Pierwiastki całkowite wielomianu $W(x)$ znajdują się wśród liczb: $-1, 1, 5, -5$. Sprawdź, że tylko liczby $-1, 1, 5$ spełniają warunki zadania.
8.171. a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}$ d) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e) $-1, -\frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
8.174. a) $-5, 2, 3$ b) $-1, 2, 7$ c) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; *wskazówka:* $W(x) = 2(6x^3 + 11x^2 + 6x + 1)$. Teraz zauważ, że wielomian $Q(x) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$ nie ma dodatniego pierwiastka. d) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; *wskazówka:* Wyznacz wymierne pierwiastki wielomianu $Q(x) = 12 \cdot W(x)$. e) $\frac{1}{5}; 2{,}5$ f) $-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
8.175. a) 2 b) $-2, -1, \frac{1}{3}$ c) $-4, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$ d) -3, 4
e) 1 f) 2 g) $-2, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}$ h) -5, 3

Pierwiastek wielokrotny

8.178. a) pierwiastki jednokrotne: $\frac{1}{2}$, -2; pierwiastek dwukrotny: 9 b) pierwiastki jednokrotne: $-5, \frac{2}{3}$; pierwiastek czterokrotny: $-\frac{2}{3}$ c) pierwiastek jednokrotny: -3; pierwiastek dwukrotny: 3; pierwiastek trzykrotny: 2; pierwiastek czterokrotny: -2 d) pierwiastek dwukrotny: $-1\frac{1}{2}$; pierwiastek trzykrotny: 0; pierwiastek czterokrotny: 3

8.179. a) 2 – pierwiastek jednokrotny; –2 – pierwiastek sześciokrotny b) $-\frac{1}{2}$ – pierwiastek jednokrotny, $\frac{1}{2}$ – pierwiastek pięciokrotny

8.180. –1 – pierwiastek czterokrotny

8.181. 2 – pierwiastek siedmiokrotny

8.182. a) pierwiastek jednokrotny b) pierwiastek dwukrotny

8.187. a) $a = 9$ lub $a = 0$ b) $a = -10$ lub $a = 10$ c) $a = 16$ d) $a \in R - \{-1, 0\}$

8.188. a) $a = -3$, $b = 3$ b) $a = 12$, $b = 8$
c) $a = 54$, $b = 36$ d) $(a = -60, b = -125)$ lub $(a = 60, b = 125)$

8.189. a) $a = 1$, $b = -8$ b) $a = 5$, $b = 1$

8.190. a) $a = 2$, $b = -1$ b) $a = -4$, $b = 1$

8.191. a) $a = 4$, $b = -4$, $c = 3$ b) $a = 6$, $b = 4$, $c = 8$

8.192. a) 1 – pierwiastek dwukrotny; $-\frac{2}{3}$ – pierwiastek jednokrotny b) $k = 3$

8.193. a) $x = 0$ – pierwiastek dwukrotny, $1\frac{1}{3}$ – pierwiastek jednokrotny b) jeśli $k = -4$, to pierwiastkiem trzykrotnym jest –2; jeśli $k = 1$, to pierwiastkiem trzykrotnym jest $\frac{1}{2}$

8.194. Wielomian ma: tylko jeden pierwiastek, jednokrotny, gdy $p \in (-9, 3)$, jeden pierwiastek dwukrotny i jeden jednokrotny, gdy $p \in \{-9, 3, 7\}$, trzy pierwiastki jednokrotne, gdy $p \in (-\infty, -9) \cup (3, 7) \cup (7, +\infty)$.

8.195. Wielomian ma: tylko jeden pierwiastek, dwukrotny, gdy $p \in (-5, 3)$; dwa pierwiastki dwukrotne, gdy $p = -5$; jeden pierwiastek czterokrotny, gdy $p = 3$; dwa pierwiastki jednokrotne i jeden dwukrotny, gdy $p \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.

Rozkładanie wielomianów na czynniki

8.196. a) $(5x-1)(5x+1)(25x^2+1)$ b) $(x-1)^2(x+1)^2$ c) $-(5x^2+2)(5x^2+2)$
d) $(3x-2)(3x+2)(9x^2+4)$ e) $-3(x+5)(x-1)$ f) $(x-6)(5x+4)$

8.197. a) $-1(x-1)(x-1)(x-1)$, czyli $-(x-1)^3$ b) $(2x+3)^3$
c) $(1+2x)(1-2x+4x^2)$ d) $(6x-5)(36x^2+30x+25)$
e) $-(x+5)(7x^2-20x+25)$ f) $(x-1)(19x^2+7x+1)$

8.198. a) $x^2(2x-1)^2$ b) $(x^2+2)(7x-3)$ c) $(3x^2+1)(x-4)$
d) $(5x-1)\left(\sqrt{7}-x\right)\left(\sqrt{7}+x\right)$ e) $x(2x-5)(x-3)$ f) $(x-4)(x+3)^2$

8.199. a) $5(x-1)^2(x-0{,}4)$ b) $2(x-2)(x+2)(x-0{,}5)$ c) $-1(4x-1)(x-1)^2$
d) $-(x+5)(x+1)(x-2)$ e) $-x(x+1)^2$ f) $(x-3)(x^2+2x-3)$

8.200. a) $(x+y)(a+b)$ b) $(a+b)(x-y)$ c) $(x-y)(c-a)$
d) $(x-y)(x+a)$ e) $(2x+y)(y-1)$ f) $(3a-b)(c+1)$

8.201. a) $(x+3)(x-2)(x+2)$ b) $(7x+2)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$ c) $(x-2)(3x^2+4)$
d) $(x-1)(x^2+1)$ e) $(x+1)(2x-1)(2x+1)$ f) $(x+2)(1-3x)(1+3x)$

8.202. a) $(9x-4)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$ b) $(5x-4)(x-1)(x+1)$
c) $4(x+1)(2x-1)(2x+1)$ d) $9(x-1)(x+1)(2x+1)$
e) $(3x-7)(x-3)(x+3)$ f) $(2x+3)(5x^2+4)$

8.203. a) $(3x+4)(2-x)(2+x)$ b) $(2x-3)(2x+3)(5x+3)$
c) $(1-2x)(2x^2+3)$ d) $(3x+8)\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)$
e) $x(x-1)(x+1)(2x+3)$ f) $x\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)(3x-1)$

8.204. a) $(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$ b) $(x+3)(2x+1)(4x^2-2x+1)$
c) $(x-1)(x-3)(x^2+3x+9)$ d) $(x-1)(5x-2)(25x^2+10x+4)$
e) $(x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$ f) $(3x+2)(x-2)(x^2+2x+4)$

8.205. a) $(x+2)(x-2)$ b) $(x-3)(x-1)$ c) $(x-7)(5x^2+2)$
d) $(3x-4)(x^2-3x+4)$ e) $(2x+3)(7-4x)$ f) $(2+x)(4x+9)$

8.206. a) $(x-1)(x+1)(x^2+2)$ b) $(x+5)^2(3x+14)$ c) $(x+4)^2(x-1)(x+1)$
d) $(x-2)(x+2)(2-x)$ e) $(x-2)(2x^2-x+5)$ f) $(3x+1)(11x^2+3x+6)$

8.207. a) $(x+2)(2x-1)(x-1)$ b) $(x-1)(x^2+x+4)$ c) $(x+1)(x+2)(3x-1)$
d) $(x-1)^2(x-5)$ e) $(2x-3)(x+2)(x-1)$ f) $(x+1)(x+3)(3x-1)$

8.208. a) $(x-1)(x+2)(x+3)$ b) $2x^3(x-1)^2(x+1)^2$ c) $(2-4x)(16x^2+20x+13$
d) $(x+3)^2(x-2)$ e) $x(5x-2)(x+1)^2$ f) $(3\sqrt{2}x-1)(x-3)(x+3)$

8.209. a) $(x+3)(x+5)^2$ b) $4(2x-3)(x-2)^2$ c) $8(4x-5)(x-2)(2x-1)$
d) $2(x-2)^2(x-4)$ e) $(x-3)(37x^2+9x+3)$ f) $(2x+3)(2x+1)(2x+5)$

8.210. a) $(x-1)(x+1)(2x^2+1)$ b) $(x+3)(x+1)(1-x)(x-3)$
c) $(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$ d) $x^3(x-6)$
e) $(1-x)(x+1)(x-2)(x+2)$ f) $x(x-1)(x+2)(x+3)$

8.211. a) $\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$ b) $3\left(x^2-\sqrt{6}x+3\right)\left(x^2+\sqrt{6}x+3\right)$
c) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ d) $(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$

8.212. a) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
b) $(x^2+1)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)$; *wskazówka:* $x^6+1=(x^2)^3+1$
c) $(2-x)(2+x)(x^2+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$
d) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$

8.213. a) $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$
b) $(x^2-2x+9)(x^2+2x+9)\left(x^2+11+2\sqrt{10}\right)\left(x^2+11-2\sqrt{10}\right)$
c) $(x+1)(x+2)(x^2+2x+6)$

d) $(2x-3)^2(x^2+4)$

e) $\frac{1}{2}(x+1)(2x^2-3x+3)$

f) $\frac{1}{4}(x-1)(x+3)(x+2)$

8.214. a) $W(x)=(x^2+x+1)(x^2+x+3)$ b) $W(x)=(x^2-x+1)(x^2-2x+3)$

Równania wielomianowe

8.215. a) $x=2$ b) $x=-4$ c) $x=-1$ d) $x\in\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$

e) $x\in\{-2,2\}$ f) równanie sprzeczne

8.216. a) $x\in\left\{-5,1\frac{1}{2},4\right\}$ b) $x\in\left\{2-\sqrt{3},2,2+\sqrt{3}\right\}$ c) $x\in\left\{-3-\sqrt{7},-3+\sqrt{7},0,\frac{1}{2}\right\}$

d) $x\in\left\{-1\frac{2}{3},-1\frac{1}{5},1\frac{2}{3}\right\}$ e) równanie sprzeczne f) $x\in\left\{-4,-3,-\sqrt{2},\sqrt{2},4\right\}$

8.217. a) $x\in\left\{-2,-\sqrt{3},\sqrt{3},2\right\}$ b) $x\in\left\{-\sqrt{5},0,\sqrt{5},3\right\}$ c) $x\in\{-3,3,4\}$

d) $x\in\left\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$ e) $x\in\{0,1\}$ f) $x\in\left\{-2,-\frac{1}{3}\right\}$

8.218. a) $x\in\{-1,1\}$ b) $x\in\left\{-2,\frac{1}{2},2\right\}$ c) $x=2$

d) $x\in\{-1,1,5\}$ e) $x\in\left\{-4,\frac{1}{2},4\right\}$ f) $x\in\left\{-\sqrt{2},-\frac{1}{3},\sqrt{2}\right\}$

8.219. a) $x\in\{0,3\}$ b) $x\in\left\{-1,\frac{2}{3},1\right\}$ c) $x\in\left\{-1,\frac{1}{3},3\right\}$

d) $x\in\left\{-4,-\sqrt{5},0,\sqrt{5}\right\}$ e) $x\in\{-2,1,2\}$ f) $x\in\left\{-\sqrt{2},-1,0,\sqrt{2}\right\}$

8.220. a) $x\in\{-2,2\}$ b) równanie sprzeczne c) $x\in\{-1,2\}$

d) $x\in\left\{-2\sqrt{2},-1,1,2\sqrt{2}\right\}$ e) $x\in\left\{\frac{-1}{\sqrt[3]{10}},\frac{1}{2}\right\}$ f) $x\in\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{5}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\}$

8.221. a) $x\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{-3-\sqrt{7}}{2},\frac{-3+\sqrt{7}}{2},3\right\}$

c) $x\in\{-3,-1,4\}$; *wskazówka:* $-13x=-x-12x$

d) $x=-3$; *wskazówka:* $-5x=-9x+4x$

e) $x\in\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$ f) $x\in\left\{-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2},2\right\}$

8.222. a) $x\in\{-6,-4,-2\}$ b) $x\in\{1,3,5\}$ c) $x\in\left\{-1,\frac{3}{2},3\right\}$

d) $x\in\{-1,2,3\}$ e) $x\in\{-2,6\}$ f) $x\in\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{2},5\right\}$; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia o całkowitych pierwiastkach wielomianu.

8.223. a) $x\in\{-3,-1,1,3\}$ b) $x\in\left\{-\sqrt[3]{4},2\right\}$ c) $x=2$

d) równanie sprzeczne e) $x=-1$ f) $x=\frac{1}{4}$

8.224. a) $x\in\{-5,0,5\}$ b) $x\in\left\{-\sqrt{6},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{6}\right\}$ c) $x\in\{-1,3\}$

d) $x=-1$ e) $x\in\left\{\frac{3-3\sqrt{5}}{4},-1,\frac{3+3\sqrt{5}}{4}\right\}$ f) $x\in\{-5,1,4\}$

8.225. a) $x\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5\sqrt{3}}{6}\right\}$ b) $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ c) $x\in\{-6,-2,2\}$

d) $x\in\left\{-3-2\sqrt{3},-3+2\sqrt{3},\frac{1}{2}\right\}$ e) $x\in\left\{-1,1\frac{1}{2},3\right\}$ f) $x\in\left\{-2,-1\frac{2}{3},2\right\}$

8.226. a) $x\in\left\{-1,-\frac{4}{5},1\right\}$ b) $x\in\left\{-2,-1,-\frac{1}{2}\right\}$ c) $x\in\{-4,-1,0,1,4\}$

d) $x\in\left\{-2\frac{1}{3},-1,3\right\}$ e) $x\in\{-1,1\}$ f) $x\in\left\{-2,\sqrt[3]{5}\right\}$

8.227. a) $x\in\left\{-2,1,2\frac{1}{2}\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ c) $x\in\{-4,0,5\}$

d) $x\in\left\{-1,\frac{1}{4},4\right\}$ e) $x\in\left\{1\frac{2}{5},2\right\}$ f) $x\in\left\{-1,\frac{1}{3},2\frac{1}{2}\right\}$

8.228. a) $x\in\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}$ b) $x\in\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$ c) $x\in\{-7,0\}$

d) $x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right\}$ e) $x\in\left\{-\frac{2}{3},-\frac{1}{2},3\right\}$ f) $x\in\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$

wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu.

8.229. a) $x=-\frac{1}{2}$ b) $x\in\left\{-\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right\}$ c) $x=1$

d) $x\in\{-2,2\}$ e) $x\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right\}$ f) $x\in\left\{1,2,2\frac{1}{2},5\right\}$

wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu.

8.230. a) $x = 2$ b) $x \in \left\{\frac{-4-\sqrt{2}}{4}, -1, \frac{-4+\sqrt{2}}{4}\right\}$ c) $x \in \{0, 3, 6\}$

d) $x \in \left\{\frac{-5-\sqrt{97}}{6}, -1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ e) $x \in \{0, 2\}$ f) $x \in \{-3, 7\}$

8.231. a) $x \in \{-2, 1\}$ b) $x \in \{-2, 2\}$ c) $x \in \{-5, -1, 1, 5\}$
d) $x \in \{-13, -1, 1, 13\}$ e) $x \in \{-2, -1, 5\}$ f) $x \in \{-2, 1, 2\}$

8.232. $a = -12$, $b = 6$ *wskazówka:* Po podstawieniu w miejsce x liczby $1+\sqrt{3}$ otrzymujemy zależność: $42 + 18\sqrt{3} = -4a - b - (2a + b)\sqrt{3}$; stąd $42 = -4a - b \wedge 18 = -2a - b$.

Zadania prowadzące do równań wielomianowych

8.233. a) $a = -2$ b) $W(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$

8.234. a) $a = -1$ lub $a = 1$ b) -2 i -6 – pierwiastki jednokrotne; 0 – pierwiastek dwukrotny

8.235. *wskazówka:* Suma współczynników jest równa 0 wtedy, gdy $a = 3$. Rozwiąż równanie $W(x) = 0$ w przypadku, gdy $a = 3$.

8.236. a) $a = 1$ b) $Q(x) = x^2 + x + 4$

8.237. $a = 1$ lub $a = \sqrt{2}$ lub $a = -\sqrt{2}$

8.238. $(-6$ i $-3)$ lub $(3$ i $6)$

8.239. $-5, -2, -3$

8.240. 28 uczniów

8.241. 241

8.242. 2 cm, 4 cm, 1 cm

8.243. 10 cm, 10 cm, 4 cm

8.244. 5 cm × 5 cm lub 10 cm × 10 cm

8.245. 7 m, 5 m, 4 m

8.246. 4, 6, 8

8.247. 3, 5, 7

Równania wielomianowe z parametrem

8.248. $a \in \left\{-3\frac{3}{4}, 1\frac{1}{8}\right\}$

8.249. $m \in \left\{-1, 0, \frac{3}{5}, 1\right\}$

8.250. $p \in \left(\frac{8}{9}, 8\right)$

8.251. $k \in \{-1, 7\}$

8.252. $a \in R - \left\{-5, -4\frac{1}{3}, -3\right\}$

8.253. $m \in (-4, -1)$

8.254. $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (5, +\infty)$

8.255. $k \in \left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, -3\right) \cup (-3, -2) \cup \left(-2, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)$

8.256. $m \in \{-2, 2\}$

8.257. $p = -3$; *wskazówka:* Równanie przyjmuje postać: $x \cdot [x^2 - (p+3) - 4] = 0$, więc 0 jest jego rozwiązaniem. Pozostałe rozwiązania x_1, x_2 są rozwiązaniami równania $x^2 - (p+3) - 4 = 0$ wtedy, gdy $\Delta > 0$. Ponadto spełniają one warunek: $x_1 \cdot x_2 = -4 < 0$, czyli mają przeciwne znaki. Zatem 0 jest średnią arytmetyczną liczb x_1 i x_2.

8.258. $a = 1$; *wskazówka:* Z pierwszego wzoru Viete'a dla wielomianów stopnia trzeciego mamy: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, stąd liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu. Po wyznaczeniu a sprawdź, że równanie ma trzy rozwiązania.

8.259. $p \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

8.260. $k \in \left(5\frac{1}{2}, +\infty\right)$

8.261. $a = -3$; *wskazówka:* Jednym z rozwiązań równania jest liczba 0.

8.262. $p \in (-2, 3) \cup \left\{-3\frac{2}{3}\right\}$

8.263. $k \in (-5, 0) \cup \left(0, 1\frac{2}{3}\right)$

8.264. $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

8.265. $m = -5$; *wskazówka:* Po dokonaniu podstawienia $t = x^2$ otrzymujemy $t^2 + (m+1)t + (m+3)^2 = 0$. Zauważ, że nie może się zdarzyć przypadek $t_1 \cdot t_2 < 0$. Zatem równanie z niewiadomą x ma dwa rozwiązania tylko wtedy , gdy równanie z niewiadomą t ma jedno rozwiązanie dodatnie.

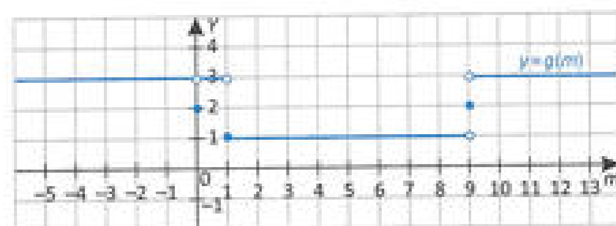
8.266. *wskazówka:* Równanie doprowadź do postaci: $(x-2)(x^2 + 2 + m^2) = 0$.

8.267. $p = -1$; *wskazówka:* Uzasadnij, grupując odpowiednio wyrazy, że liczba -2 spełnia to równanie.

8.268. Jeśli $p \in (-1, 3)$, to równanie ma jedno rozwiązanie: 1; jeśli $p = -1$, to równanie ma dwa rozwiązania: -1 i 1; jeśli $p \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, to równanie ma trzy rozwiązania.

wskazówka: Uzasadnij, grupując odpowiednio wyrazy, że liczba 1 spełnia to równanie.

8.269. $g(m) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } m \in \langle 1,9) \\ 2, \text{ jeśli } m \in \{0,9\} \\ 3, \text{ jeśli } m \in (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (9,+\infty) \end{cases}$



wskazówka: Wielomian $x^3 + 6x - 7$ rozłóż na czynniki.

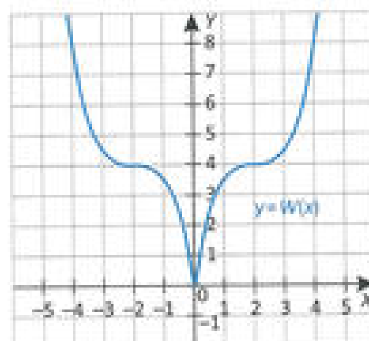
Funkcje wielomianowe

8.270. a) $a = -1,\ b = 3,\ c = 6,\ d = -8$ b) $x \in \{-2, 1, 3\}$

8.271. a) $y = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$ b) $x \in \{-3, -1, 3\}$

8.272. a) $y = 6x^4 - 39x^3 + 90x^2 - 84x + 24$ b) $x \in \left\{-3\frac{1}{2}, -2\right\}$

8.273. a) $a = \frac{1}{2}$ b) $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x$



8.274. a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x$; *wskazówka:* $W(x) = x(x^2 + bx + c)$, gdzie $b^2 - 4c < 0$
b) $(-1, -13), (3, 3)$

8.275. a) $y = \frac{1}{4}(x-1)(x+3)(x^2 + 2x + 5)$ b) $-3, 1$

8.276. a) $W(x) = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 2$ b) $R(x) = 1$

8.277. $W(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$; *wskazówka:* -2 jest pierwiastkiem dwukrotnym lub czterokrotnym wielomianu $W(x)$, zatem $W(x) = (x+2)^2(ax^2 + bx + c)$, gdzie $a \neq 0$.

8.278. a) $y = x^4 - 2x^2$ b) $x \in \{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$

8.279. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1)$ b) $W(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1\frac{1}{3}$ c) $x \in \{-2, -1, 0\}$

8.280. a) $W(x) = -(x-1)^2(x+2)$ b) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \{1\}$ c) $(-3, 16), (-2, 0), (3, -20)$

8.281. a) $W(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2$ b) $G(x) = -\frac{1}{4}(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})(x^2 + 5)$

8.282. a) $W(x) = (x-3)(x^2+3)$

Nierówności wielomianowe

8.283. a) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}, 2\right)$ b) $x \in \{2\} \cup \langle 5, +\infty)$ c) $x \in (-3, 1) \cup (1, 2)$
d) $x \in \langle -2, 2\rangle$ e) $x \in \langle 0, 4\rangle \cup \{-2\}$ f) $x \in (-2, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$

8.284. a) $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$ b) $x \in \{0\} \cup \langle 3, +\infty)$
c) $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$ d) $x \in R - \{-2, 3\}$
e) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ f) $x \in \langle -3, -1\rangle \cup \{4\}$

8.285. a) $x \in (-\infty, -6\rangle \cup \langle -2, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 3\rangle$
c) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \left\langle 1, 3\frac{1}{2}\right\rangle$ d) $x \in \left\langle -3, -1\frac{2}{3}\right\rangle \cup \langle 3, +\infty)$
e) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ f) $x \in \left\langle 2\frac{1}{2}, +\infty\right) \cup \{1\}$

8.286. a) $x \in (-\infty, -4) \cup (2, 3)$ b) $x \in (1, 3) \cup (5, +\infty)$
c) $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \left\langle 1\frac{1}{2}, 4\right\rangle$ d) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \left\langle -2\frac{1}{2}, 3\right\rangle$
e) $x \in \langle 3, +\infty) \cup \left\{-1\frac{1}{2}\right\}$ f) $x \in \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

8.287. a) $x \in \left\langle 1\frac{1}{2}, +\infty\right) \cup \{-1\}$ b) $x \in \left(-\infty, -1\frac{2}{3}\right\rangle \cup \{2\}$
c) $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, -2) \cup (1, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -1) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$
e) $x \in (-\infty, -\sqrt{6}\rangle \cup \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{6}, +\infty)$ f) $x \in (-\sqrt{10}, -2) \cup (2, \sqrt{10})$

8.288. a) $D = R$ b) $D = (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
c) $D = (-\infty, 2\rangle$ d) $D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \{2\}$

8.289. a) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, +\infty)$ b) $x \in (-4, -1) \cup (-1, 2)$
c) $x \in \{-1\} \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$
e) $x \in R - \{-5, -3, 3, 5\}$ f) $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$

8.290. a) $x \in (-\infty, -1) \cup \{2\} \cup \langle 5, +\infty)$ b) $x \in (-6, -1) \cup (-1, 4)$
c) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ d) $x \in (-8, -6) \cup (-4, 0) \cup (2, 4)$
e) $x \in \langle -5, 1)$ f) $x \in (-\infty, 3) \cup (7, +\infty)$

8.291. a) $x \in (-\infty, -4) \cup \langle -1, 1) \cup \langle 4, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup \langle -2, 2) \cup \langle 3, +\infty)$
c) $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$ d) $x \in (-2, 3)$
e) $x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup \langle 5, +\infty)$ f) $x \in (-\infty, 1)$

8.292. wskazówka: $L = x^4 + (x^4 - 2x^2 + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 1$

8.293. wskazówka: $17x^2 = 16x^2 + x^2$

8.297. wskazówka: Wykaż, że $x^8 + 3x^6 - 2x^5 - 6x^3 + x^2 + 3 = x^6(x^2 + 3) - 2x^3(x^2 + 3) + (x^2 + 3)$

8.298. wskazówka: Wykaż, że $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 = x^2(x + 1)^2 - 6x(x + 1) + 9$

Test sprawdzający do rozdziału 8.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	D	C	B	D	D	C	C	D	A

Nr zadania	11	12	13	14	15
Odpowiedź	B	C	A	D	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

16. $F(x) = 6x^2 + 4x - 31$; wielomian $F(x)$ ma dwa pierwiastki.

17. Istnieją: $a = -2$, $b = -1$

18. a) $\frac{4\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{5} + 1}{39}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2} + 3}{29}$

19. a) $W(x) = (1 - x)(x - 5)(x + 5)(1 + x + x^2)$; pierwiastki: $-5, 1, 5$
b) $x(x - 1)(x - 5)(x + 6)$; pierwiastki: $-6, 0, 1, 5$

20. a) $a = 2$ b) $-4, -1, 2$

21. $a \in \{-2, -1, 1\}$

22. a) $a = 4$, $b = 1$ b) pierwiastki całkowite: $-2, 3$

23. a) $x = 3\frac{1}{2}$ b) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ c) $x \in \{-3, \sqrt[3]{2}\}$ d) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 1, 2\right\}$

24. 425; wskazówka: Przedstaw wyrażenie w postaci $(x + 3)(3x^2 - 1)$ i w miejsce x podstaw $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

25. a) $W(x) = (1 - x)(x - 4)(x + 2)$ b) $W(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x - 8$

30. wskazówka: Zapisz kolejne liczby naturalne w postaci: $4n + 1$, $4n + 2$, $4n + 3$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Następnie doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:
$(4n + 1)^3 + (4n + 2)^3 + (4n + 3)^3$.

31. wskazówka: Zbadaj różnicę $\frac{1 + 4a^8}{4} - a^4$.

32. wskazówka: Doprowadź wyrażenie do postaci: $-7a^4 - 6a^2 - 1$.

33. wskazówka: Wykaż, że $(x + 3)^3 - (x - 1)^3 = 12x^2 + 24x + 28$; następnie uzasadnij, że najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = 12x^2 + 24x + 28$ jest równa 16

34. a) iloraz: $Q(x) = x^2 + 6x + 2$; reszta: $R(x) = -19x + 28$
b) $W(x) = (x + 5)(x + 2)(x - 1)(x - 3)$

35. $(a = 6, b = 1)$ lub $(a = 3, b = 2)$

36. $3x + 4$

37. a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

38. $m = 2$; wskazówka: Zauważ, że $W(-1) = 0$ dla $m \in \mathbf{R}$. Następnie skorzystaj z twierdzenia o całkowitych pierwiastkach wielomianu.

40. a) $x \in \mathbf{R} - \{3\}$ b) $x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle -\sqrt{21}, 0\rangle \cup \langle 1, 4\rangle \cup \langle \sqrt{21}, +\infty)$

41. a) $y = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \{1\}$

42. a) $W(x) = (x + 1)(x + 1)(5 - x)$ b) $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$

43. a) $p = 1$, $q = 14$ b) -29

44. wskazówka: Pierwiastkiem wielomianu jest liczba 3 albo liczba 5. W obu przypadkach otrzymujemy $a = -7$.

45. wskazówka: Wykaż, że liczba $2^p - 4$ jest podzielna przez 7. Skorzystaj ze wzoru na $a^n - b^n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$

46. wskazówka: Dane wyrażenie doprowadź do postaci $(k - 1)(k - 2)(k - 3)$.

47. wskazówka: I sposób: Niech $x = \sqrt[3]{37\sqrt{10} + 117} - \sqrt[3]{37\sqrt{10} - 117}$;
wówczas $x^3 = \left(\sqrt[3]{37\sqrt{10} + 117} - \sqrt[3]{37\sqrt{10} - 117}\right)^3$,
stąd $x^3 = 234 - 3\left(\sqrt[3]{37\sqrt{10} + 117} - \sqrt[3]{37\sqrt{10} - 117}\right)$, czyli $x^3 = 234 - 3x$. Dana liczba spełnia równanie $x^3 + 3x - 234 = 0$. Wykaż, że jedynym rozwiązaniem równania $x^3 + 3x - 234 = 0$ jest liczba 6.
II sposób: Pokazujemy, że $(3 + \sqrt{10})^3 = 37\sqrt{10} + 117$ oraz $(\sqrt{10} - 3)^3 = 37\sqrt{10} - 117$

48. $m \in (-5, 1) \cup \{-7\}$

49. a) $x \in \left\langle \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, +\infty \right) \cup \{2\}$
b) $m \in (-\infty, -5) \cup \left(-5, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

50. Równanie ma: jedno rozwiązanie, jeśli $m \in (-3, 0\rangle$; dwa rozwiązania, jeśli $m \in \{-3, 1\}$; trzy rozwiązania, jeśli $m \in (-\infty, -3) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

α	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$	
1°	0,017	0,017	57,290	1,000	89°
2°	0,035	0,035	28,636	0,999	88°
3°	0,052	0,052	19,081	0,999	87°
4°	0,070	0,070	14,301	0,998	86°
5°	0,087	0,087	11,430	0,996	85°
6°	0,105	0,105	9,514	0,995	84°
7°	0,122	0,123	8,144	0,993	83°
8°	0,139	0,141	7,115	0,990	82°
9°	0,156	0,158	6,314	0,988	81°
10°	0,174	0,176	5,671	0,985	80°
11°	0,191	0,194	5,145	0,982	79°
12°	0,208	0,213	4,705	0,978	78°
13°	0,225	0,231	4,331	0,974	77°
14°	0,242	0,249	4,011	0,970	76°
15°	0,259	0,268	3,732	0,966	75°
16°	0,276	0,287	3,487	0,961	74°
17°	0,292	0,306	3,271	0,956	73°
18°	0,309	0,325	3,078	0,951	72°
19°	0,326	0,344	2,904	0,946	71°
20°	0,342	0,364	2,747	0,940	70°
21°	0,358	0,384	2,605	0,934	69°
22°	0,375	0,404	2,475	0,927	68°
23°	0,391	0,424	2,356	0,921	67°
24°	0,407	0,445	2,246	0,914	66°
25°	0,423	0,466	2,145	0,906	65°
26°	0,438	0,488	2,050	0,899	64°
27°	0,454	0,510	1,963	0,891	63°
28°	0,469	0,532	1,881	0,883	62°
29°	0,485	0,554	1,804	0,875	61°
30°	0,500	0,577	1,732	0,866	60°
31°	0,515	0,601	1,664	0,857	59°
32°	0,530	0,625	1,600	0,848	58°
33°	0,545	0,649	1,540	0,839	57°
34°	0,559	0,675	1,483	0,829	56°
35°	0,574	0,700	1,428	0,819	55°
36°	0,588	0,727	1,376	0,809	54°
37°	0,602	0,754	1,327	0,799	53°
38°	0,616	0,781	1,280	0,788	52°
39°	0,629	0,810	1,235	0,777	51°
40°	0,643	0,839	1,192	0,766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755	49°
42°	0,669	0,900	1,111	0,743	48°
43°	0,682	0,933	1,072	0,731	47°
44°	0,695	0,966	1,036	0,719	46°
45°	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\alpha$	α